Claude Boucher

Professeur titulaire retraité du département de mathématiques,
Université de Sherbrooke

(2007)

“En attendant Gödel ou Adieu, ma certitude...”

Un document produit en version numérique par Jean-Marie Tremblay, bénévole,
professeur de sociologie au Cégep de Chicoutimi

Courriel: jean-marie_tremblay@uqac.ca

Site web pédagogique : <http://www.uqac.ca/jmt-sociologue/>

Dans le cadre de la collection: "Les classiques des sciences sociales"

Site web: <http://classiques.uqac.ca/>

Une collection développée en collaboration avec la Bibliothèque
Paul-Émile-Boulet de l'Université du Québec à Chicoutimi

Site web: <http://bibliotheque.uqac.ca/>

Cette édition électronique a été réalisée par Jean-Marie Tremblay, bénévole, professeur de sociologie au Cégep de Chicoutimi à partir de :

Claude Boucher
Professeur titulaire retraité, département de mathématiques,
Université de Sherbrooke

“En attendant Gödel ou Adieu, ma certitude...”.

Un texte inédit (non publié). Mai 2007.

L’auteur, M. Claude Boucher, a accordé aux Classiques des sciences sociales la permission de diffuser cet article, vendredi, le 4 août 2006.

Courriel : cboucher@sympatico.ca

Polices de caractères utilisée :

Pour le texte: Times New Roman, 14 points.

Pour les citations : Times New Roman, 12 points.

Pour les notes de bas de page : Times New Roman, 12 points.

Édition électronique réalisée avec le traitement de textes Microsoft Word 2004 pour Macintosh.

Mise en page sur papier format : LETTRE (US letter), 8.5’’ x 11’’)

Édition numérique réalisée le 22 mai 2007 à Chicoutimi, Ville de Saguenay, province de Québec, Canada.

Claude Boucher

Détenteur d'un doctorat en sciences mathématiques, Claude Boucher fut professeur titulaire au Département de mathématiques et d'informatique de l'Université de Sherbrooke.

L'essentiel des recherches qu'il a effectuées au cours de sa carrière portait sur les automates mathématiques, les langages formels et les réseaux de Petri.

Il donne actuellement à l'Université de Sherbrooke dans le cadre du programme de formation continue des aînés une série de cours intitulés *Les Grandes Découvertes*.

Sources : Ouvrage sous la direction de Robert Lahaise, **Québec 2000. Multiples visages d'une culture**, page 422. Montréal: Les Éditions Hurtubise HMH, ltée, 1999, 462 pp. Collection: Les Cahiers du Québec.

Table des matières

[Présentation du texte par l’auteur](#), mai 2007.

[Les périls de l’infini](#)

[La crise pythagoricienne](#)

[La crise des séries infinies](#)

[Les géométries non euclidiennes](#)

[La crise des fondements des mathématiques](#)

[Les pièges de l’évidence](#)

[Y a-t-il un mathématicien dans la salle ?](#)

[Le logicisme](#)

[L’intuitionnisme](#)

[Le formalisme](#)

[L’axiomatisation de la théorie des ensembles](#)

[En attendant Gödel](#)

Présentation du texte

En attendant Gödel ou Adieu, ma certitude, est un texte “issu de conférences que j’ai données devant des auditoires de philosophes et de mathématiciens. Le texte traite de diverses crises traversées par la pensée mathématique au cours de l’histoire.

J’ai essayé de ne pas alourdir le texte avec un appareillage mathématique trop costaud afin de n’effrayer personne et d’intéresser ce qu’on appelait au XVII^e siècle « l’honnête homme ».”

Claude Boucher
Professeur titulaire retraité
Département de mathématiques
Université de Sherbrooke

Mai 2007.

Claude Boucher
Professeur titulaire retraité, département de mathématiques,
Université de Sherbrooke

“En attendant Gödel ou Adieu, ma certitude...”.

Un texte inédit (non publié). Mai 2007.

Estragon.- [...] Allons-nous-en.
Vladimir.- On ne peut pas.
Estragon.- Pourquoi ?
Vladimir.- On attend Godot.
Samuel Beckett, *En attendant Godot*

LES PÉRILS DE L'INFINI

[Retour à la table des matières](#)

Nous le savons : aucune des vicissitudes qui assombrissent l'exercice de la condition humaine n'est, dans la pratique de leur discipline, épargnée aux mathématiciens. En vérité, le cours de l'histoire des mathématiques n'est pas - comme certains candidement l'imaginent -, *un long fleuve tranquille*. (Pour faire écho à un film inoubliable d'Étienne Chatilliez.) Et l'on pourrait évoquer ici les plus importantes des crises qui troublèrent au passage du temps la sérénité des chercheurs, crises qui furent, fréquemment, provoquées par le maniement imprudent de concepts qui se rapportaient à l'infini. Parmi ces crises, nous mentionnerons, pour ne nous borner qu'à un petit nombre d'exemples, la découverte des nombres irrationnels par les pythagoriciens au VI^e siècle avant notre ère, les paradoxes provoqués aux XVII^e et XVIII^e siècles par l'étude des infinitésimaux et les séries infinies, l'apparition des géométries non euclidiennes au XIX^e et, enfin, au siècle dernier, la crise, particulièrement virulente, qui vint ébranler les fondements mêmes des sciences mathématiques.

LA CRISE PYTHAGORICIENNE

[Retour à la table des matières](#)

Il est difficile de donner une vue précise de la pensée pythagoricienne. Tant de légendes se sont tissées au fil des ans à propos de Pythagore et de la secte dont il avait été le maître. Même si la tradition associe son nom à la démonstration du célèbre théorème affirmant que le carré de l’hypoténuse d’un triangle rectangle est égal à la somme des carrés des deux autres côtés, on aurait tort de penser que Pythagore ou ses disciples avaient fondé leur savoir mathématique sur des preuves systématiquement organisées, comme on en trouve dans les *Éléments* d’Euclide, qui furent rédigés plusieurs siècles plus tard.

Mais on est à peu près assuré que, pour les pythagoriciens, les nombres représentaient la substance et la mesure de toutes choses. Ils conféraient à un tel énoncé le caractère immuable et sacré d’un dogme. Or, les seuls nombres qu’ils connaissaient étaient les entiers naturels (1, 2, 3, 4, etc.) et les fractions, c’est-à-dire les rapports d’entiers. Par la suite, beaucoup plus tard, on inclura dans l’ensemble des entiers naturels le nombre 0 qui n’a jamais appartenu à la pensée pythagoricienne ni à l’arithmétique grecque de l’Antiquité. Une tradition, dont Aristote se fait l’interprète, nous rapporte qu’un membre de la secte pythagoricienne s’avisa un jour que, en vertu de ce théorème dit de Pythagore, il était impossible de mesurer à l’aide des nombres alors connus à la fois le côté et la diagonale d’un carré.

Suivons le raisonnement qu’il avait sans doute tenu, en considérant un carré dont le côté est égal à 1. Le carré de la diagonale de ce carré sera égal à $1^2 + 1^2 = 2$. On en conclut que la longueur de la diagonale est égale à ce nombre que l’on désigne, dans la notation qui nous est familière, par $\sqrt{2}$.

Admettons qu’il existe deux entiers m et n dont le rapport est égal à $\sqrt{2}$. On peut supposer qu’au moins l’un de ces deux nombres est

impair, sinon on pourrait simplifier la fraction en enlevant le facteur 2 commun au numérateur et au dénominateur, tout comme on peut remplacer $16/10$ par la fraction équivalente $8/5$.

De la relation $m/n = \sqrt{2}$, on tirera $m = n\sqrt{2}$, puis, en élevant chaque membre au carré, $m^2 = 2n^2$. On en conclut que m^2 est pair, ce qui entraîne que m est lui aussi pair. Mais le carré d'un nombre pair est un multiple de 4. Ce qui entraîne que n^2 et n sont pairs et contredit le fait que l'on avait admis au départ que m et n avaient été simplifiés de manière à ce qu'au moins l'un d'entre eux soit impair. Cette contradiction provient du fait que l'on avait erronément supposé au départ qu'il était possible de trouver une fraction simplifiée m/n telle que $m/n = \sqrt{2}$. Nous avons ici un bel exemple d'une preuve par l'absurde qui montre qu'il n'existe pas de nombre fractionnaire pouvant mesurer la diagonale d'un carré dont le côté est égal à 1.

En grec, le mot *logos* signifie à la fois *raison* et *parole*. Un nombre comme $\sqrt{2}$ fut d'abord appelé *indicible* (*alogos*). On emploiera ensuite l'expression *nombre irrationnel* (en grec, *alogoi*) — on pourrait en quelque sorte dire *nombre déraisonnable* — pour désigner ces nombres qui bouleversaient les croyances pythagoriciennes voulant que toute chose puisse être mesurée par des entiers ou des nombres fractionnaires, alors qu'il est impossible d'exprimer en même temps le côté d'un carré et sa diagonale au moyen du rapport (du *ratio*) de deux entiers naturels.

LA CRISE DES SÉRIES INFINIES

[Retour à la table des matières](#)

Au XVII^e siècle naissait, sous la plume d’Isaac Newton (1642 – 1727) et de Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716), cette discipline mathématique à laquelle on a donné le nom de *calcul différentiel et intégral*. Ces travaux conduisirent ces mathématiciens et leurs successeurs à explorer le comportement de diverses séries infinies. On dira qu’une série infinie *converge* vers une valeur donnée, si la somme des termes de cette série s’approche de cette valeur d’aussi près que l’on veut à mesure que s’accroît la suite des nombres dont cette série est formée. On dira qu’une série infinie est *divergente*, s’il est impossible de trouver une telle valeur ou si la somme des termes tend vers l’infini (autrement dit, dépasse toute borne fixée d’avance) à mesure que les termes s’additionnent.

Il est évident qu’une série infinie comme

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots$$

est divergente. Mais il est des cas où la détermination du caractère convergent ou divergent d’une série infinie se fait beaucoup moins aisément. Et il existe des séries infinies dont la somme diffère selon l’ordre dans lequel les termes sont placés, ou qui passent de la convergence à la divergence selon la méthode que l’on emploie pour les calculer. Leibniz était médusé par la série

$$s = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

Quand on additionne les uns à la suite des autres les termes dont cette série est composée, on obtient alternativement les valeurs 1 et 0. Si on regroupe les termes deux à deux, on aura

$$s = (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots = 0 + 0 + 0 + 0 + \dots = 0.$$

Mais si on les regroupe de la manière suivante, on obtient une somme différente :

$$s = 1 - (1 - 1) + (1 - 1) - (1 - 1) + (1 - 1) + \dots = 1 - 0 + 0 - 0 + 0 - 0 \dots = 1 .$$

Enfin, si on écrit la série comme suit :

$$s = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots)$$

on se retrouve avec l'équation $s = 1 - s$, d'où on tire $s = 1/2$.

Au fait, demandera-t-on, cette série converge-t-elle vers 0, vers 1, vers 1/2, ou est-elle divergente, comme le laissait croire l'alternance de la somme des termes successifs oscillant entre 0 et 1 ? Nous répondrons dans peu d'instant à cette question après avoir donné un second exemple d'une série dont la convergence ou la divergence paraissait problématique au cours des décennies qui suivirent la naissance du calcul différentiel et intégral. Il est possible de démontrer (bien que nous ne le ferons pas ici) que la fonction $\log(1+x)$ est égale à la série infinie

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \dots$$

On peut aussi démontrer que cette série est convergente pour des valeurs de x qui se situent dans l'intervalle semi-ouvert $] -1, 1]$.

En posant x égal à 1, on obtient la série

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$$

Mais, en modifiant l'ordre des termes, on aurait

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \frac{1}{7} - \frac{1}{14} - \frac{1}{16} + \dots$$

que l’on regroupera pour obtenir

$$\log 2 = (1 - \frac{1}{2}) - \frac{1}{4} + (\frac{1}{3} - \frac{1}{6}) - \frac{1}{8} + (\frac{1}{5} - \frac{1}{10}) - \frac{1}{12} + (\frac{1}{7} - \frac{1}{14}) - \frac{1}{16} + \dots$$

puis

$$\log 2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \frac{1}{14} - \frac{1}{16} + \dots$$

$$\log 2 = \frac{1}{2} (1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots) = \frac{1}{2} \log 2$$

On pourrait en conclure que $\log 2 = 0$, et pourtant n’importe quelle table de logarithmes naturels vous apprendra que $\log 2 = 0,693147\dots$

D’où vient l’erreur ? Du fait que nous avons commis l’imprudence de modifier l’ordre des termes de ces séries infinies et de les associer ensuite comme nous l’avons fait. Les propriétés de commutativité, d’associativité et de distributivité peuvent être appliquées de façon parfaitement légitime quand le nombre des termes concernés est fini, mais ces propriétés ne sont plus nécessairement valides dans le cas des séries infinies. C’est ce dont les successeurs de Leibniz devront se convaincre en explorant les concepts de convergence et de divergence des séries infinies de manière plus rigoureuse que ne l’avaient fait les créateurs des calculs différentiel et intégral.

Blaise Pascal (1623 – 1662), qui fut l’un des plus brillants mathématiciens de son époque, après s’être associé aux querelles théologiques de Port-Royal, s’était donné pour mission à la fin de sa vie de convertir aux croyances chrétiennes les libres penseurs qu’il avait naguère fréquentés. Il écrivait à leur intention dans l’une de ses pensées :

Vous voulez aller à la foi, et vous n’en savez pas le chemin ; vous voulez vous guérir de l’infidélité, et vous en demandez le remède ; apprenez de

ceux qui ont été liés comme vous, et qui parient maintenant tout leur bien ; ce sont gens qui savent ce chemin que vous voudriez suivre, et guéris d'un mal dont vous voulez guérir. Suivez la manière par où ils ont commencé : c'est en faisant tout comme s'ils croyaient, en prenant de l'eau bénite, en faisant dire des messes, etc. Naturellement même cela vous fera croire et vous abêtira.

Face aux inquiétudes que soulevaient les paradoxes apparents nés de l'étude des séries infinies, Jean Le Rond d'Alembert (1717 – 1783), qui fut le cerveau mathématique de l'*Encyclopédie* au temps des Lumières, avait écrit en parodiant ironiquement Pascal :

Allez, allez, continuez, fermez les yeux et la foi viendra.

Mais il faudra encore bien des travaux avant que, en dressant des garde-fous et des pare-feux efficaces contre de tels paradoxes, ne soient éclaircis tous ces mystères.

Dans l'Antiquité grecque, Parménide avait fondé sa réflexion philosophique sur le concept d'*Être*, qu'il concevait comme éternel, homogène, indivisible et immuable. Pour illustrer cette permanence de l'Être, son disciple Zénon d'Élée avait formulé quelques paradoxes visant à montrer que le mouvement n'est qu'apparence et qu'il échappe aux lois de la pensée.

L'un de ces paradoxes se lisait comme suit : avant qu'une flèche lancée vers une cible n'atteigne son but, elle doit d'abord parcourir la moitié de la distance, puis la moitié de la moitié de cette distance, puis la moitié de la moitié de la moitié, et ainsi de suite à l'infini. Par conséquent, la flèche se trouve forcée de parcourir une infinité de segments, si petits soient-ils, avant d'atteindre la cible. Comment pourrait-elle alors y parvenir ?

Évidemment, les Grecs savaient aussi bien que nous que les flèches, même lancées par la main d'archers malhabiles, finissent par aboutir quelque part. Et Diogène, agacé par ces arguties, estimait qu'il suffisait de déambuler autour de l'agora pour réfuter Zénon. Mais, pendant longtemps, on était néanmoins mal à l'aise devant de tels paradoxes.

Au fait, la distance que doit parcourir la flèche de Zénon peut être représentée à l’aide d’une série infinie :

$$s = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots$$

Et quiconque n’a pas raté son cours de *Calcul 101*, fort des travaux de ses devanciers □ rappelons-nous la métaphore des nains qui voient plus loin que les géants sur les épaules desquels ils sont juchés □, vous apprendra que cette série est convergente et que sa somme est égale à 1. *Bye bye*, Zénon, tu peux remballer ton paradoxe.

LES GÉOMÉTRIES NON EUCLIDIENNES

[Retour à la table des matières](#)

Dans le premier livre de ses *Éléments*, Euclide (~III^e siècle) formulait un axiome (le cinquième) qui s’énonçait comme suit : *si une sécante croise deux droites en produisant des angles intérieurs du même côté dont la somme est plus petite que deux angles droits, les prolongements de ces deux droites devront nécessairement se rencontrer*. Ce que l’on peut illustrer par la figure que voici.

On peut dire de cet axiome qu’il fut un mal-aimé de l’histoire de la géométrie. Il semble qu’Euclide lui-même ne l’ait accepté qu’à son corps défendant après avoir vainement tenté de le démontrer à partir des autres axiomes des *Éléments* dont l’évidence lui paraissait moins

discutable. Par la suite, bien d’autres mathématiciens éprouveront à son égard les mêmes réticences, essayant à leur tour d’en faire la démonstration. Mais en vain. Dans une thèse de doctorat intitulée *Conatuum præcipuorum theoriæ parallelarum demonstrandi recensio* (Revue des principales tentatives pour démontrer l’axiome des parallèles), présentée en 1763 à l’université de Göttingen, Georg Simon Klügel (1739 – 1812) recensait près d’une trentaine de prétendues preuves de ce cinquième axiome, mettant en lumière les failles qui entachaient la validité de ces preuves.

Quelques décennies plus tôt, un jésuite italien, le père Girolamo Saccheri (1667 – 1733), avait essayé de démontrer par l’absurde le cinquième axiome. En s’appuyant sur les autres axiomes des *Éléments* et sur la négation de ce cinquième axiome, il avait développé une théorie dont il espérait tirer une contradiction flagrante. Il avait certes obtenu une géométrie si étrange qu’il conclura que ses conséquences « répugnent à la nature de la ligne droite ». Par exemple, dans une telle géométrie la somme des angles d’un triangle n’était pas égale à 180° . Mais il lui fut impossible de parvenir à l’une de ces contradictions manifestes qui viennent habituellement clore les preuves par l’absurde. Ce qui l’avait conduit à publier l’année de sa mort un traité intitulé *Euclides ab omni nævo vindicatus* (Euclide exonéré de toute souillure).

Dans la *Critique de la raison pure* (la deuxième édition date de 1786), Emmanuel Kant (1724 – 1804) rangeait cet axiome, tout comme l’ensemble des axiomes et des théorèmes de la géométrie d’Euclide, parmi les jugements *apodictiques* □ du grec *apodeiktikos* qui signifie *péremptoire*. Il entendait par là un énoncé qui s’impose à la raison de manière universelle et nécessaire, indépendamment de toute observation ou expérience. Mais, peu avant, le mathématicien allemand Johann Heinrich Lambert (1728 – 1777) avait été conduit par ses recherches à discuter, sinon à mettre en doute, le caractère contraignant de cet axiome.

À la fin du XVIII^e siècle, un mathématicien écossais, John Playfair (1748 – 1819), publiait une traduction des *Éléments* d’Euclide dans laquelle il montrait que le cinquième axiome est logiquement équivalent à l’énoncé suivant : *étant donnés une droite D et un point P situé*

hors de cette droite, il est possible de tracer une et une seule droite qui soit parallèle à la droite donnée. Ce qu’illustre la figure suivante.

En vérité, dans ses commentaires de l’œuvre d’Euclide, le philosophe byzantin Proclus avait déjà au V^e siècle de notre ère formulé un tel énoncé. Néanmoins, un usage solidement ancré donne fréquemment à cette proposition le nom de *postulat d’Euclide*, et une géométrie qui s’appuie sur un tel postulat est dite *euclidienne*.

En compulsant après sa mort les manuscrits qu’il avait laissés, on apprendra que Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855) avait dès 1792 posé les jalons d’une géométrie où ce célèbre postulat était remplacé par le suivant : *étant donnés une droite et un point situé en dehors de cette droite, il est possible de tracer plus qu’une droite qui passe par ce point et soit parallèle à la droite donnée*. Il obtenait ainsi une géométrie évidemment différente de celle d’Euclide □ on l’appellera par la suite *géométrie hyperbolique* □, mais dont la cohérence interne était aussi rigoureuse que la précédente. Gauss se garda bien néanmoins de publier ces résultats de peur de soulever, écrira-t-il, les « hauts cris des béotiens ». Mais, sous sa plume, les géométries non euclidiennes venaient de naître.

Quelques décennies plus tard, deux jeunes mathématiciens, le Hongrois Janos Bolyai (1802 – 1860) et le Russe Nicolai Ivanovitch Lobatchevski (1792 – 1856), professeur à l’université de Kazan, sans connaître les travaux de Gauss, s’engageaient chacun de leur côté dans les sentiers que ce dernier avait secrètement tracés. Par malheur, comme ils habitaient loin des centres scientifiques réputés, leurs travaux ne connaîtront à l’époque qu’une faible diffusion.

Mais, entre-temps, les progrès de la recherche géométrique soulevaient un nombre croissant de questions délicates que l’on ne pouvait

espérer résoudre qu’après un examen critique approfondi des fondements mêmes de la géométrie classique. En 1854, Bernhard Riemann (1826 – 1866), qui avait été l’élève de Gauss, s’attaqua brillamment à cette tâche en présentant une thèse intitulée *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen* (Sur les hypothèses qui servent de fondement à la géométrie). Dans ce travail, il en vient à proposer une nouvelle variante du postulat d’Euclide qui se présente comme suit : *étant donnés une droite et un point situé en dehors de cette droite, il est impossible de tracer une droite qui passe par ce point et qui soit parallèle à la droite donnée*. Félix Klein (1849 – 1925) appellera *géométrie elliptique* une théorie construite en s’appuyant sur ce type de postulat.

On se retrouvait donc devant trois types de géométries : l’une qui reposait sur le postulat d’Euclide et deux qui prenaient le contre-pied de celui-ci, soit en admettant la possibilité de tracer plus d’une parallèle à une droite donnée, soit en admettant qu’il était impossible de tracer une telle parallèle. Posons tout de suite la question qui nous vient spontanément à l’esprit. Laquelle de ces trois théories est la *vraie* : celle d’Euclide, celle de Gauss, Bolyai et Lobatchevski ou celle de Riemann ? Pendant longtemps, comme semblait le penser Kant, la réponse paraissait évidente : celle d’Euclide. Mais la suite de l’histoire des mathématiques et de la science devait nuancer, voire ébranler, une telle certitude.

En 1869, dans une note intitulée *Über die sogenannte nicht-euklidische Geometrie* (Sur les soi-disant géométries non euclidiennes), Klein montrait que la géométrie d’Euclide, tout comme les géométries non euclidiennes, sont des cas particuliers de la géométrie projective, une géométrie qu’il est possible d’élaborer sans faire appel au postulat des parallèles. Il reste que ce ne sera pas sans résistance que ces géométries nouvelles — on peut aussi inclure parmi celles-là les géométries qui exploraient les propriétés des espaces ayant plus de trois dimensions — seront acceptées par l’ensemble des membres de la communauté mathématique. Le mathématicien italien Giusto Bellavitis qualifiait la géométrie de Lobatchevski de *géométrie pour hôpital psychiatrique*. Charles Dodgson, professeur de mathématiques à Oxford — il deviendra célèbre sous le pseudonyme de Lewis Carroll

en publiant *Alice au pays des merveilles* — commettra en 1879 un texte satirique, *Euclid and his modern rivals*, qui se déroule dans les Enfers, où Minos voue aux flammes perpétuelles les géomètres infâmes qui ont osé mettre en doute le cinquième axiome des *Éléments*.

En formulant cette question sur la *vérité* d’une théorie mathématique, on touche à un problème capital qui continuera de hanter l’épistémologie des mathématiques — autrement dit, l’étude critique des fondements de cette discipline — durant une importante partie du XX^e siècle. Pour tenter d’y répondre, on peut emprunter deux principales avenues. L’une concerne la cohérence interne de ces trois théories. On se demandera — un peu à la manière dont Saccheri avait procédé pour établir la véracité du cinquième axiome — s’il n’est pas possible de tirer une contradiction à partir des axiomes de l’une ou de l’autre d’entre elles. Toute théorie contradictoire doit être impitoyablement écartée, ou tout au moins soumise à une prophylaxie rigoureuse visant à faire disparaître les sources de cette contradiction.

L’autre approche se proposerait d’établir la conformité de l’une des ces théories avec la *réalité* (si tant est que l’on soit capable de déterminer avec une quelconque certitude en quoi consiste cette réalité). Et, après tout, pourquoi ne se pourrait-il pas que ces théories, loin de s’opposer, constituent des modèles complémentaires de secteurs distincts de la complexe nature des choses et du mystérieux espace dans lequel cette nature est immergée ? Henri Poincaré avait écrit : « L’expérience est la source unique de la vérité : elle seule peut nous apprendre quelque chose de nouveau. » Pour lui, une géométrie n’est pas plus vraie qu’une autre, elle ne peut qu’être plus ou moins commode pour analyser un ordre donné de phénomènes.

C’est ainsi que l’on sera progressivement conduit à remettre en question la définition traditionnelle d’une théorie mathématique et le problème de ses rapports avec la réalité. Et c’est par le biais de la géométrie que l’on percevra les signes avant-coureurs de la crise des fondements des mathématiques dont nous traiterons dans peu d’instant. Au premier abord, certes, on sera porté, comme Kant le faisait dans sa *Critique de la raison pure*, à conclure que l’axiome voulant que l’on puisse tracer une et une seule parallèle à une droite donnée à partir d’un point situé hors de cette droite s’impose de ma-

nière péremptoire à la perception et à la pensée. Cela peut paraître évident quand on dessine sur une feuille de papier posée sur une table.

Mais imaginons une fourmi-arpeur ignorant tout de la courbure de la surface terrestre, placée à l'équateur en un point *A* situé à quelques mètres d'un méridien terrestre, c'est-à-dire de l'un de ces grands cercles qui passent par les pôles et qui, par conséquent, coupent perpendiculairement l'équateur. Supposons qu'on demande à cette courageuse fourmi de tracer sur la surface terrestre une droite parallèle à ce méridien.

Forte des connaissances en géométrie plane qu'elle a acquises au creux de sa fourmilière, elle se dira qu'il lui suffit pour accomplir cette tâche de partir de *A* en élevant une « droite » perpendiculaire à l'équateur. En tous cas, en procédant ainsi, elle croira de bonne foi se diriger en ligne droite. Par malheur, à mesure qu'elle poursuivra sa tâche, la courbure de la Terre la rapprochera de plus en plus du méridien initial. De sorte que, rendue au pôle Nord, la prétendue droite parallèle viendra couper ce méridien. C'est dire que la validité et, a fortiori, l'évidence du postulat d'Euclide s'évanouissent quand on l'applique à une surface courbe.

Dans le cas elliptique (où on ne peut tracer aucune parallèle à une droite donnée), il suffit, comme dans l'exemple de la fourmi-arpeur, de considérer comme modèle la surface d'une sphère, et de prendre comme « droites » les grands cercles dessinés sur cette surface. Pour obtenir un grand cercle passant par deux points donnés, il suffit de déterminer l'intersection de la surface de la sphère avec le plan défini par ces deux points et le centre de celle-ci. On appelle *ligne géodésique* (ou plus brièvement *géodésique*) tout segment d'un de ces grands cercles. Comme les droites ordinaires dans un plan, les géodésiques représentent sur une surface sphérique le plus court chemin entre deux points. Une société aérienne qui entend établir un vol entre deux villes a intérêt dans la mesure du possible de faire suivre à ses avions la géodésique qui les unit. On remarquera que sur une surface sphérique la courbure est considérée comme ayant une valeur constante positive.

Dans le cas hyperbolique (où on peut par un point donné tracer au moins deux droites parallèles à une droite donnée), plusieurs types de figures ont été proposés au fil des ans pour modéliser une telle géométrie. Nous choisirons d’abord parmi celles-là la *pseudosphère* dont l’histoire, comme nous allons le voir ne manque pas de pittoresque. Mais il nous faut pour décrire cette figure parler au préalable d’une courbe conçue au XVII^e siècle et appelée *tractrice*.

Claude Perrault (1613 – 1688) n’était pas appelé par ses professions de médecin et d’architecte à jouer un rôle important dans l’histoire des mathématiques. En vérité, son frère Charles, avec ses *Contes de ma mère l’Oye*, sa *Cendrillon*, son *Petit Chaperon rouge* et son *Chat botté*, ainsi que son rôle de porte-étendard dans la querelle des Anciens et des Modernes, devait laisser une trace bien plus marquante dans l’histoire de la culture et de la pensée. Mais Claude eut un jour l’idée de mettre sa montre au milieu d’une table, de tendre vers le rebord la chaîne qui retenait cette montre, de déplacer lentement l’extrémité de la chaîne le long du rebord de la table et de se demander s’il était possible de décrire mathématiquement la trajectoire que suivrait la montre. Cela se passait en 1676. Le problème était facile à poser, mais bien moins facile à résoudre. Par bonheur, Gottfried Leibniz et Isaac Newton s’étaient dès cette époque attaqués à la création du calcul différentiel et intégral, et ce fut grâce à cette théorie nouvelle que le mathématicien, physicien et astronome néerlandais Christiaan Huygens apportait en 1693 une solution correcte au problème posé par Claude Perrault. Il donna à la courbe qu’il avait obtenue le nom de *tractrice*, mot créé à partir du mot *tractus*, participe passé d’un verbe latin qui signifie *traîner*.

Dans la figure ci-dessus, supposons que la montre (réduite en un point : nous sommes dans le monde idéal de la géométrie) soit en M , que la chaîne soit tendue de M à A et que l'axe vertical représente le rebord de la table. Si le point A se déplace vers le haut le long de l'axe vertical, M suivra une trajectoire donnée par la branche de cette courbe dirigée vers le haut. Si A se déplace vers le bas le long de l'axe vertical, on obtient la branche symétrique dirigée vers le bas. Théoriquement, ces deux branches (qui forment la tractrice) s'approchent de manière asymptotique de l'axe vertical, autrement dit, elles se rapprochent de plus en plus de cet axe quand A tend vers l'infini.

Si on fait tourner une tractrice autour de l'axe vertical, on obtient une figure dans l'espace qui a reçu le nom de *pseudosphère* qui est représentée dans la figure suivante :

Le nom que l'on a donné à cette figure peut paraître paradoxal, puisque sa forme ne rappelle en rien celle d'une sphère. Ce nom s'explique néanmoins par le fait que la sphère possède une courbure positive constante et une surface finie et fermée, tandis que la pseudosphère possède une courbure constante mais négative, et que sa surface est ouverte et infinie. Certains auteurs préfèrent donner le nom d'*antisphère* à ce type de figure. Dans ce modèle de géométrie hyperbolique, les « droites », on pourrait aussi dire les géodésiques, correspondent aux diverses positions de la tractrice quand on la fait tourner autour de son axe vertical pour générer la pseudosphère.

Un autre modèle de géométrie hyperbolique peut être obtenu en considérant la surface d'une figure dans l'espace qui a reçu le nom de *paraboloïde hyperbolique*. Il existe plusieurs façons de caractériser une telle figure. La plus simple manière de générer une telle surface consiste à faire glisser une droite le long de deux droites qui ne sont pas *coplanaires* (autrement dit, qui ne sont pas situées dans un même plan). De manière imagée, on appelle *selle de cheval* un tel type de surface. Les « droites » sur une selle de cheval correspondent aux positions occupées par la droite génératrice en mouvement.

On peut démontrer que dans l'un ou l'autre de ces deux modèles de surfaces (la pseudosphère et la selle de cheval) le postulat d'Euclide n'est pas satisfait, puisqu'à partir d'un point situé en dehors d'une « droite » donnée il est toujours possible de tracer deux « droites » distinctes qui ne rencontrent pas la « droite » donnée. Comme dans le cas de la surface sphérique, la courbure de ces surfaces est constante, mais elle prend alors une valeur négative.

D'un strict point de vue logique, les géométries elliptique ou hyperbolique se révélèrent aussi cohérentes que la géométrie euclidienne classique, tout en différant par de nombreux aspects de celle-ci. Par exemple, alors que dans la géométrie euclidienne la somme des angles d'un triangle est égale à deux droits, dans la géométrie elliptique cette somme est supérieure à deux droits, tandis que dans la géométrie hyperbolique elle leur est inférieure. L'apparente cohérence de ces diverses géométries, qui n'a pas été prise en défaut jusqu'ici, est un puissant argument en faveur de la thèse voulant que le cinquième

axiome d’Euclide soit indépendant des autres axiomes de la géométrie et, par conséquent, qu’il ne peut pas être démontré à partir de ceux-là.

Mais, en dépit de cette cohérence, les géométries non euclidiennes parurent à l’époque comme des curiosités intellectuelles tout à fait gratuites, dénuées de tout rapport avec la réalité. Or, au siècle suivant, les recherches des astrophysiciens les amenèrent à concevoir des modèles de l’espace-temps suivant lesquels, à grande échelle, le cosmos présentait une courbure qui l’amenait à se refermer sur lui-même. Si nous ne parvenons pas à percevoir cette courbure, c’est parce que, immergés dans cet espace-temps, nous sommes placés dans une situation analogue à celle de notre fourmi-arpenteur qui était incapable de se rendre compte de manière immédiate de la courbure de la surface terrestre. Il se pourrait que les géométries non euclidiennes se prêtent bien mieux que la géométrie d’Euclide à la formulation de ces modèles de l’espace-temps, en particulier au voisinage des trous noirs : ces étranges objets que nous a révélés l’astrophysique contemporaine au sein desquels régnerait une gravité si intense qu’elle déchire le tissu de l’espace-temps et dévore tout ce qui se trouve en son voisinage.

LA CRISE DES FONDEMENTS DES MATHÉMATIQUES

[Retour à la table des matières](#)

C’est Léon Daudet, je crois, qui avait parlé du « stupide XIX^e siècle ». Ce jugement à l’emporte-pièce d’un pamphlétaire forcené de l’extrême droite glapissante est particulièrement injuste, quand on prétend l’appliquer à l’activité mathématique et scientifique de cette époque. En dépit des aboiements de monsieur Daudet, la caravane darwiniennne a poursuivi sa route. Mais tenons-nous-en aux mathématiques. Ce siècle avait en ce domaine connu une fécondité et des progrès considérables. On y voit naître des théories nouvelles ou se développer et se raffermir des théories esquissées dans les siècles antérieurs. Le cas des géométries non euclidiennes que nous venons de citer n’en est qu’un parmi de nombreux exemples. On pourrait ajouter les théo-

ries des groupes, des idéaux et des corps, l’analyse combinatoire, l’analyse des variables réelles et complexes, la topologie, la logique mathématique, la théorie de l’information, la physique mathématique. Si longue qu’elle puisse paraître, cette liste est loin d’être exhaustive.

Face à cette prolifération, ce jaillissement, ce développement profus et parfois désordonné, il fallut un jour songer à quelque moyen de retrouver l’unité perdue de la science mathématique, d’en mieux assurer la cohérence et d’assujettir par un examen critique attentif les fondations de l’édifice tout entier. En créant la théorie des ensembles, Georges Cantor (1845 - 1918) s’attaqua à cette tâche immense, hérissée de difficultés imprévues, telles des ronces aux épines desquelles sa raison elle-même devait un jour se déchirer. Car cette entreprise allait le conduire au sein de territoires logiques inexplorés où l’attendaient, sans qu’il le soupçonnât, de virulentes antinomies. C’est ainsi que naquit, fruit de ses recherches, une crise de la pensée mathématique d’autant plus sévère et douloureuse qu’elle minait à sa base même une muraille qu’il avait cru dresser pour assurer à jamais la certitude des mathématiques. Nous sommes alors à l’orée du XX^e siècle. Les acquis du siècle précédent nous permettent de regarder l’avenir avec confiance. La fécondité des mathématiques apparaît comme le garant de leur cohérence. Et puis patatras, avec le tournant du siècle, une flopée de paradoxes, dont l’un est même issu des propres recherches de Cantor, éclosent soudainement dans la théorie des ensembles.

Pour le bénéfice des personnes qui liront ces lignes mais ne sont pas familières avec cette théorie, qu’on me permette d’en esquisser ici les rudiments. Intuitivement, on donne le nom d’*ensemble* à toute collection d’objets concrets ou abstraits. Les mathématiciens, cela va de soi, s’intéressent de manière particulière aux ensembles d’êtres mathématiques qui font l’objet de leurs recherches. Par exemple, on parlera de l’ensemble

$$\{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

des entiers naturels, de l’ensemble des points d’une droite, et ainsi de suite. Il existe plusieurs façons de désigner un ensemble. L’une consiste, comme on le fait fréquemment en algèbre, à utiliser une lettre quelconque pour nommer cet ensemble. On peut aussi désigner un

ensemble en donnant la liste des éléments qui le composent. Par exemple, $\{a, e, i, o, u, y\}$ et $\{0, 2, 4, 6, 8, \dots\}$ désigneront respectivement l'ensemble des voyelles de la langue française et l'ensemble des entiers naturels pairs. On dit alors que l'ensemble est défini par *extension*. Il va de soi que, dans le cas d'un ensemble infini, la liste ne saurait être énumérée de manière exhaustive.

Il existe une troisième façon de décrire un ensemble : on l'appelle *schéma de compréhension*. Ce schéma consiste à énoncer une propriété caractéristique des éléments dont cet ensemble est formé. Par exemple, l'ensemble P des entiers naturels pairs serait, en utilisant le schéma de compréhension, représenté par la formule suivante :

$$\{x \mid x \text{ est divisible par } 2\},$$

où le symbole à gauche de la barre verticale désigne un élément générique de cet ensemble, tandis qu'on indique à droite la propriété qui caractérise cet élément générique. Ces propriétés caractéristiques, les logiciens leur donnent habituellement le nom de *prédicats*.

Une relation fondamentale de la théorie des ensembles se rapporte au concept d'*appartenance*. On dit qu'un être mathématique quelconque *appartient* (ou *n'appartient pas*) à un ensemble donné s'il est (ou n'est pas) un élément de cet ensemble. Ces relations d'appartenance ou de non-appartenance sont respectivement désignées par les symboles $\in$ ou $\notin$. Si P représente l'ensemble des entiers pairs, on écrira par exemple

$$18 \in P \text{ et } 3/4 \notin P.$$

À côté de cette relation qui unit un objet à un ensemble, il en existe une autre qui relie les ensembles entre eux. Supposons que l'on ait deux ensembles quelconques A et B . On dira que A est un *sous-ensemble* de B (ce que l'on représentera par la notation $A \subseteq B$), si tout élément de A est aussi un élément de B . Par exemple, si V désigne l'ensemble des voyelles et A l'ensemble des lettres de l'alphabet, il est permis d'écrire $V \subseteq A$.

Pour n’importe quel ensemble A , on peut écrire $A \subseteq A$, puisque, comme l’aurait dit monsieur de La Palice, tout élément de A est... un élément de A . Donc tout ensemble est un sous-ensemble de lui-même. On trouvera cependant utile dans certains cas de parler de *sous-ensemble propre* d’un ensemble A pour désigner un sous-ensemble de A distinct de A . Si B est sous-ensemble propre de A , on écrira $B \subset A$ plutôt que $B \subseteq A$, si on désire mettre en évidence ce fait. Si les deux relations $A \subseteq B$ et $B \subseteq A$ sont simultanément satisfaites, on conclura que les deux ensembles A et B possèdent les mêmes éléments, et on écrira $A = B$.

Parmi tous les ensembles qu’il est possible de concevoir, les mathématiciens trouvent commode d’admettre l’existence d’un ensemble caractérisé par le fait qu’il ne contient aucun élément. On l’appelle l’*ensemble vide* et on le désigne par le symbole $\emptyset$. Certains trouvent paradoxal que l’on admette l’existence d’un tel ensemble. En fait, le concept d’ensemble vide n’est pas plus paradoxal que le nombre 0 qui trouve sa place parmi les entiers naturels, ces nombres qui servent à faire le décompte des objets appartenant à un ensemble quelconque. Si, inspiré par une chanson de Juliette Gréco, on entend déterminer l’ensemble des fourmis de dix-huit mètres avec un chapeau sur la tête qui parlent latin et javanais, on sera bien forcé de conclure que cet ensemble n’est autre que l’ensemble vide.

Prenons un ensemble A quelconque. Il est aussi permis d’écrire que $\emptyset \subseteq A$, car tout élément de $\emptyset$ appartient par défaut à A , puisque $\emptyset$ ne contient aucun élément. Ainsi donc on admettra que l’ensemble $\emptyset$ est un sous-ensemble de n’importe quel ensemble. Si on appelle *cardinalité* d’un ensemble le nombre des éléments qui appartiennent à cet ensemble, on peut dire que la cardinalité de l’ensemble vide est égale à 0. On utilisera la notation $|E|$ pour désigner la cardinalité de l’ensemble E .

Supposons que l’on ait un ensemble $E = \{a, b, c\}$ formé de trois éléments. Dressons la liste de tous les sous-ensembles de E . On trouvera évidemment dans cette liste $\{a\}$, $\{b\}$ et $\{c\}$, les sous-ensembles de E formés d’un seul élément, ainsi que $\{a, b\}$, $\{a, c\}$ et $\{b, c\}$, les sous-ensembles de E composés de deux éléments. Mais, en vertu de

ce que nous avons dit ci-dessus, il existe deux autres sous-ensembles qu’il convient d’ajouter à cette liste : l’ensemble E tout entier et l’ensemble vide $\emptyset$. On désignera par $P(E)$ cet ensemble de tous les sous-ensembles de E .

L’ensemble E comptait trois éléments. L’ensemble $P(E)$ de ses sous-ensembles en compte 8, c’est-à-dire 2^3 . Ce n’est pas un hasard. De manière générale, on pourrait démontrer que si la cardinalité de l’ensemble E est égale à n , la cardinalité de l’ensemble $P(E)$ serait égale à 2^n .

LES PIÈGES DE L’ÉVIDENCE

[Retour à la table des matières](#)

Les crises dans le progrès de la pensée et de la science viennent fréquemment de ce qu’on se laisse égarer par les pièges de l’évidence. Pour Cantor, il semblait aller de soi que l’on puisse associer à une propriété quelconque un ensemble qui serait formé de tous les objets qui possèdent cette propriété, autrement dit, il lui semblait évident que l’on pouvait, pour définir un ensemble, utiliser sans contraintes le schéma de compréhension. Nous allons voir que l’utilisation de ce schéma peut, s’il est fait inconsidérément, conduire à d’insolubles antinomies.

Quand nous avons défini ci-dessus le concept de sous-ensemble, nous avons vu que le nombre des sous-ensembles d’un ensemble de trois éléments était égal à 8. Donc, dans cet exemple, le nombre des éléments (autrement dit la cardinalité) de l’ensemble de tous les sous-ensembles de l’ensemble donné était *strictement supérieur* à celui de l’ensemble initial. Cantor avait démontré que cette propriété était vraie pour n’importe quel ensemble, indépendamment de sa cardinalité, qu’elle soit finie ou infinie. Ce théorème de Cantor peut être formulé ainsi : *pour tout ensemble S , la cardinalité de l’ensemble $P(S)$ des sous-ensembles d’un ensemble S est strictement supérieure à la cardinalité de l’ensemble S* . En disant que la cardinalité d’un ensem-

ble est *strictement supérieure* à la cardinalité d’un second ensemble, on écarte la possibilité que ces cardinalités puissent être égales. Par exemple, l’ensemble N des entiers naturels est infini, mais l’ensemble $P(N)$ de tous les sous-ensembles de N est un ensemble infini dont la cardinalité est strictement plus grande que celle de N . Il existe donc, Cantor venait de le démontrer, des *infinis qui sont plus infinis que d’autres* !

Il est facile de tirer un premier paradoxe de ce théorème et du postulat voulant qu’il soit possible d’associer un ensemble à n’importe quel prédicat. Prenons comme propriété caractéristique *être un ensemble* et posons

$$E = \{X \mid X \text{ est un ensemble}\}.$$

E serait donc *l’ensemble de tous les ensembles*. Mais $P(E)$ est aussi un ensemble, c’est donc un élément de E , ce que l’on peut écrire $P(E) \in E$. Et puisque tout élément X de $P(E)$ est un ensemble, il s’ensuit aussi que $X \in E$. Donc $P(E) \subseteq E$. La cardinalité de $P(E)$ ne serait donc pas strictement supérieure à celle de E , ce qui contredit le théorème de Cantor.

L’étude qu’il avait faite du paradoxe de Cantor avait amené Bertrand Russell (1872 – 1970) — il sera tour à tour philosophe, mathématicien, moraliste et militant pacifiste — à concevoir un paradoxe que les personnes peu familières avec les mathématiques avancées auraient moins de peine à comprendre. En 1902, Russell en communiquera la teneur à Gottlob Frege (1848 – 1925) au moment où celui-ci s’apprêtait à publier le second tome d’un ouvrage intitulé *Grundgesetze der Arithmetik (Les lois fondamentales de l’arithmétique)*. Frege s’était donné pour tâche de démontrer que l’ensemble des mathématiques était réductible à la logique, discipline qui apparaissait à beaucoup comme le garant ultime de la vérité. On donnera par la suite le nom de *logicisme* à l’école du XX^e siècle qui s’inspirera de ce programme. Pour ce faire, Frege avait entrepris de mettre en œuvre son projet en s’attaquant d’abord à l’arithmétique, c’est-à-dire à l’étude des propriétés des entiers naturels, sur laquelle il espérait faire reposer par la suite l’étude des autres théories mathématiques.

Pour définir les entiers naturels, Frege avait allégrement fait appel au schéma de compréhension. Par exemple, pour lui, l’entier 2 était l’ensemble de *toutes* les paires d’objets, l’entier 3, l’ensemble de *tous* les trios, etc. Le paradoxe de Russell viendra montrer la fragilité de cet édifice. Ce paradoxe utilise le schéma de compréhension pour définir l’ensemble de *tous les ensembles qui ne sont pas éléments d’eux-mêmes*. Expliquons. Si on considère l’ensemble des Chinois, on sait bien que cet ensemble est un concept abstrait et non pas un Chinois. Donc l’ensemble des Chinois n’est pas un élément de lui-même. En revanche, l’ensemble de tous les ensembles peut être considéré (imprudemment peut-être) comme un élément de lui-même. Désignons donc par M l’ensemble de tous les ensembles qui ne sont pas éléments d’eux-mêmes. Conformément à la notation que nous avons introduite ci-dessus, nous pourrions écrire $M = \{X \mid X \notin X\}$.

Posons-nous la question suivante : M est-il oui ou non un élément de lui-même ? Autrement dit, est-ce que $M \in M$ ou est-ce que $M \notin M$? Si on suppose que $M \in M$, il faut conclure que l’ensemble M possède la propriété caractéristique de ses éléments, c’est-à-dire de ne pas être un élément d’eux-mêmes. On en déduit que $M \notin M$. Mais si, en revanche, on supposait que $M \notin M$, l’ensemble M posséderait la propriété caractéristique de ses éléments. Il faudrait conclure que $M \in M$. Autrement dit, l’ensemble M sera un élément de lui-même si et seulement s’il n’est pas un élément de lui-même !

En voulant faire porter ses raisonnements sur l’ensemble de tous les ensembles ayant une propriété donnée, le mathématicien risque fort de se retrouver avec des contradictions insurmontables. C’est ce dont Russell n’eut aucune peine à convaincre Frege, qui se résignera à écrire dans la conclusion de son ouvrage :

Rien n’est aussi pénible pour un homme de science que de voir s’effondrer les fondements de ses travaux au moment même où il y met la dernière main. C’est la position dans laquelle je me suis retrouvé en recevant une note de M. Bertrand Russell alors que mon ouvrage allait sous presse.

Un adage nous rappelle qu’il ne faut pas jeter les bébés avec les eaux du bain. Il serait donc imprudent de conclure à partir de ces pa-

radoxes que toute utilisation du schéma de compréhension est invalide. Ces constatations obligeaient néanmoins logiciens et mathématiciens à encadrer de prudentes balises l’usage de ce schéma. Nous verrons dans la suite de cet exposé les solutions qui seront proposées au cours des décennies qui suivront pour atteindre cet objectif et empêcher l’éclosion de pareils paradoxes. Mais, en dépit de sa confortable évidence, le schéma de compréhension était devenue une arme empoisonnée. Et horreur ! le ver était caché non pas dans une province excentrique des mathématiques, mais au cœur d’une discipline — la logique — considérée comme fondamentale et dont Cantor et Frege avaient rêvé de tirer éventuellement la preuve de la cohérence de la totalité des sciences mathématiques. Voyant cela, des malins écriront : « La théorie des ensembles n’est plus une discipline stérile : elle engendre des paradoxes. » Et certains en viendront à conclure que « les générations à venir regarderont la théorie des ensembles comme une maladie dont on a fini par guérir ».

Y A-T-IL UN MATHÉMATICIEN DANS LA SALLE ?

[Retour à la table des matières](#)

Pourtant des écoles s’élaborent bientôt pour réparer les brèches ouvertes par ces paradoxes. Le concept d’ensemble, se dit-on, est essentiel, mais on l’a manié avec trop d’imprudence. Et il en est de même du schéma de compréhension. Ces concepts d’ensembles de tous les ensembles dotés d’une propriété donnée généraient des collections d’objets mal précisées qui recelaient le germe de toutes les contradictions. Ces diverses écoles, nous les grouperons sous quatre enseignes : le *logicisme*, dont la théorie des types de Russell représente la plus importante réalisation, l’*intuitionnisme* de Brouwer, le *formalisme* de Hilbert et enfin l’*axiomatisation* de la théorie des ensembles entreprise d’abord par Zermelo, puis à sa suite par divers autres mathématiciens.

LE LOGICISME

[Retour à la table des matières](#)

Nous avons dit que le logicisme est une tentative pour réduire les mathématiques à la logique. On pourrait, en poussant plus loin encore cette ambition, songer à réduire à la logique toute la pensée réflexive. On retrouve bien avant le XIX^e siècle des manifestations d’un tel programme, par exemple chez un philosophe et théologien catalan du nom de Raymond Lulle et chez le philosophe et mathématicien allemand Wilhelm Gottfried Leibniz.

Placé au carrefour des cultures chrétienne, arabe et juive, Raymond Lulle (1235 – 1315) — en catalan son nom s’écrit Ramon Llull — s’était donné pour tâche de convertir les musulmans au christianisme en recourant à la force de la raison ! Pour ce faire, il avait conçu en particulier dans son *Ars magna* (le Grand Art) le projet d’un langage basé sur une logique combinatoire, qui aurait constitué une clé universelle de la connaissance et un moyen infaillible de trancher toute discussion philosophique ou théologique. Dans son *Discours de la méthode*, René Descartes (1596 — 1650) dira de l’art de Lulle qu’il sert à parler sans jugement des choses que l’on ignore plutôt que de les apprendre. Et reprenant les propos méprisants de Descartes, dans *Émile ou De l’Éducation* Jean-Jacques Rousseau dira de cet art qu’il se contente « de nous apprendre à babiller de ce qu’on ne sait point ».

Leibniz, nous l’avons mentionné précédemment, partage avec Newton l’honneur d’avoir créé le calcul différentiel et intégral. C’était un génial touche-à-tout qui s’illustra dans maints domaines de la pensée et de l’activité humaine, comme la philosophie et la théologie, le droit et la politique. Il avait conçu dans sa jeunesse le projet de créer un langage symbolique, qu’il avait appelé *caractéristique universelle*, applicable autant à la logique et à la philosophie qu’aux mathématiques et aux sciences de la nature, bref, à toutes les disciplines où l’on se mêle de raisonner et de discuter. Grâce à ce langage universel, espérait-il, les disputes entre philosophes se régleraient aussi simple-

ment que les désaccords entre mathématiciens sont éclaircis par une vérification de leurs calculs et de leurs démonstrations. Dans son conte philosophique *Candide ou l’Optimisme* (1759), Voltaire attribue à Pangloss, l’ineffable précepteur de Candide, le rôle de défenseur de la pensée — travestie à des fins polémiques — de Leibniz. L’étymologie du nom *Pangloss* nous renvoie à une expression grecque qui signifie *Toute langue*. Il est facile de voir dans ce nom une malicieuse allusion à la caractéristique universelle.

Les ambitieux projets de Lulle et de Leibniz, par leur ampleur même, ne purent être menés à bien. Mais on trouve dans leurs œuvres les germes de recherches effectuées aux XIX^e et XX^e siècles par Boole, Cantor, Frege et leurs successeurs, afin de formaliser la logique, d’unifier les disciplines mathématiques et de leur conférer des assises logiques imprenables.

Inspiré par le programme de Leibniz, Frege avait en 1879 publié un traité intitulé *Begriffsschrift*, titre que l’on pourrait rendre littéralement par *Écriture des concepts*. Il fut traduit en français sous le titre pompeux d’*Idéographie*. Mettant en évidence les ambiguïtés des langues naturelles, il proposait une méthode formelle de représentation et d’analyse des énoncés mathématiques, qu’il espérait pouvoir étendre à l’ensemble des domaines où intervient le discours raisonné. Ces recherches le menèrent à la rédaction des *Lois fondamentales de l’arithmétique* où, comme nous l’avons vu, il devait se heurter sans l’avoir soupçonné aux pièges cachés sous l’utilisation du schéma de compréhension. En dépit de cet échec et de l’indifférence que ses travaux rencontrèrent, il avait mis en place des concepts et des formalismes qui inspireront durant les décennies qui suivirent logiciens, mathématiciens et philosophes. Entre autres, Russell — dont nous parlerons plus longuement dans un instant —, Alfred North Whitehead, Ludwig Wittgenstein et les membres du Cercle de Vienne reprendront le flambeau qu’il avait allumé.

Parce qu’il avait mis le feu aux poudres, Russell se devait de réparer les pots cassés en reprenant les travaux de Frege, mais, cette fois, en mettant en place des garde-fous qui préviendraient les paradoxes que l’usage inconsidéré du schéma de compréhension avait fait naître.

Il s'appuiera sur une réflexion fort juste de Henri Poincaré voulant que ces paradoxes résultaient de ce que, en définissant certains ensembles, on s'était rendu coupable d'une faute logique, qu'on pourrait appeler *circularité*. Cette faute provient du fait qu'en voulant définir un être mathématique on se réfère directement ou indirectement à l'objet que l'on veut définir. Les paradoxes de Cantor et de Russell sont apparus quand on a respectivement considéré l'ensemble de tous les ensembles et l'ensemble de tous les ensembles qui ne se contiennent pas eux-mêmes comme éléments. Pour désigner ce mode de forfait intellectuel que maints penseurs ont un jour ou l'autre commis, les logiciens anglo-saxons ont créé l'expression de *bootstrap lifting*. C'est un procédé qui consiste à tenter de se soulever dans les airs en tirant sur ses propres courroies de bottes !

Pour éviter cet écueil, le remède que proposait Russell consistait à partager les ensembles en strates disjointes enchâssées les unes dans les autres. On a donné le nom de *théorie des types* à cette approche. On part d'objets initiaux, les *atomes*, susceptibles d'appartenir à des collections, mais qui ne peuvent pas être eux-mêmes des collections. On leur associe le type 0. Puis, on associe le type 1 à tout ensemble dont les éléments sont de type 0, le type 2 à tout ensemble dont les éléments sont de type 1, et ainsi de suite. On n'accepte alors de parler d'appartenance (ou de non-appartenance) d'un objet à un autre que si le type du second est immédiatement supérieur à celui du premier. Autrement, on considère toute affirmation ou négation d'appartenance comme dénuée de signification. Puisque l'on ne pourrait y écrire de façon légitime des relations comme $X \in X$ ou $X \notin X$, cette compartimentation des ensembles réussit effectivement à prévenir les paradoxes précédents. Ces précautions étant prises, il sera possible à Russell, à Whitehead et à leurs successeurs de sauver une part importante des travaux de Frege.

Mais d'autres paradoxes apparurent bientôt. Si les premiers étaient de nature proprement logique, les seconds furent appelés *paradoxes sémantiques*. Ils résultaient non plus d'un concept mathématique plus ou moins bien défini, celui d'ensemble, mais semblaient provenir de l'imprécision intrinsèque du langage, et frappaient au cœur même de l'instrument qui avait été conçu pour en régler l'analyse et le fonctionnement, c'est-à-dire la grammaire.

Ce type de paradoxes était connu dès l’Antiquité. Épiménide, un philosophe crétois qui vivait au VI^e siècle avant notre ère, aurait déclaré : « Tout ce que disent les Crétois est un mensonge ». Ce qui rapproche Épiménide de Yogi Berra, le joueur vedette des Yankees de New York, à qui on attribue ce *yogiberrisme* : « Plus de la moitié des mensonges que l’on dit à mon sujet sont faux. » Mais ne nous laissons pas écarter de nos antiques moutons. Dans l’*Épître à Tite* (chapitre I, versets 12 et 13), dont la tradition voudrait qu’elle ait été rédigée par saint Paul, on peut lire un écho de cet aphorisme : « L’un d’entre eux, leur propre prophète, a dit : “Crétois : perpétuels menteurs, mauvaises bêtes, ventres paresseux.” Ce témoignage est vrai. Aussi reprends-les vertement pour qu’ils conservent une foi saine. »

Malgré cette péremptoire affirmation, il y a pourtant lieu de se demander si la maxime d’Épiménide est aussi fondée que le croit l’auteur de l’épître à Tite. Car cette déclaration recèle un embarrassant paradoxe sémantique. Si on admet qu’elle est vraie, il faut conclure, puisque Épiménide était Crétois, qu’elle est un mensonge. Mais, en même temps, puisqu’elle est vraie, nous avons au moins un exemple où un Crétois dit la vérité, contrairement à ce qu’affirmait la déclaration du philosophe.

Deux siècles plus tard, un autre philosophe grec, nommé Eubulide de Milet, formulait un paradoxe qui s’énonçait comme suit : « La présente phrase est fausse. » Si l’on admet qu’elle est vraie, on en conclura qu’elle est fausse. Mais, en revanche, si on admet qu’elle est fausse, on devra conclure qu’elle est vraie.

Cet exemple, comme bien d’autres plus récents qui alimentaient le folklore des mathématiciens et des logiciens, convainquirent Russell que la théorie des types telle qu’il l’avait énoncée ne suffisait pas à endiguer les flots de cette envahissante maladie. C’est ainsi que naquit la *théorie des types ramifiée*, qui prendra le relais de la théorie des types simple que nous venons de décrire.

Cette théorie utilisera deux formes de stratification, l’une qui se rapporte aux types des objets considérés, l’autre se rapportant aux ordres introduits au sein des énoncés d’une théorie. En codifiant les rè-

gles qui régiront leur formation, la seconde forme introduit une hiérarchie des ordres d'énoncés qui permet d'éviter les paradoxes sémantiques. Car, à l'instar des paradoxes logiques, les paradoxes d'Épiménide et d'Eubulide proviennent d'une faute semblable : la circularité qui entache la référence d'un énoncé à son propre contenu. Par exemple, l'énoncé *Tout ce que disent les Crétois est un mensonge* serait placé par la théorie des types ramifiée dans un ordre différent de celui où se situaient les déclarations habituelles des Crétois, y compris celles d'Épiménide.

Ainsi prévient-on de tels paradoxes. Mais à quel prix ? Car cette nouvelle théorie entraîne une stratification des objets logiques, et par conséquent une stratification des êtres mathématiques. Les opérateurs de négation et d'implication, les quantificateurs universels (*pour tout x ...*) et existentiels (*il existe un x tel que...*), les valeurs de vérité, des termes comme *définition*, *proposition*, *entier naturel* et *nombre cardinal*, etc. doivent être dissociés et répartis selon des niveaux différents. Les concepts de la logique et des mathématiques se dissolvent pour devenir des *faisceaux* de concepts. Et, à la place des notions intuitives de classe et d'ensemble que l'on trouvait chez Cantor, Russell introduit un *axiome de réductibilité* qui oblige à faire appel à une terminologie et à une notation qui sont tout sauf intuitives.

Cet axiome vient s'ajouter aux axiomes de la logique, sans que l'on ait montré comment il serait possible de le réduire à des propositions issues de ces axiomes. Il en est de même pour deux autres axiomes auxquels Russell et Whitehead feront appel : il s'agit de l'*axiome de l'infini* et de l'*axiome multiplicatif*. Le premier postule l'existence d'au moins un ensemble infini, tandis que l'autre affirme que le produit d'un ensemble quelconque d'ensembles non vides est un ensemble non vide. L'introduction de ces axiomes, si utiles qu'ils soient, mettait en péril le programme de l'école logiciste qui s'était proposé de réduire les mathématiques à la logique.

En s'attaquant à des difficultés qui ressortissaient aux mathématiques, à la logique, à la philosophie et à la linguistique, Russell et Whitehead ont poursuivi trop de lièvres à la fois. On en conclura que le programme logiciste (tout au moins sous sa forme pure et dure) s'est traduit par un échec et qu'il n'a pu être mené à son terme. La morale

de cette histoire est la suivante : les mathématiques reposent évidemment sur des fondations logiques, mais leur contenu se situe au-delà de ces fondations et n'est pas réductible à celles-ci. Il n'en reste pas moins que ces travaux n'ont pas été vains, puisqu'ils furent les premiers à formuler une définition du concept d'entier naturel qui ne soit pas contradictoire, qu'ils élaborèrent l'approche contemporaine de la théorie des relations et, partant, celle des fonctions, et qu'ils mirent en place de nombreux concepts qui inspireront les recherches de Hilbert et de Gödel, pour ne nommer que ceux-là.

L'INTUITIONNISME

[Retour à la table des matières](#)

On trouve dans les œuvres de René Descartes (1596 - 1650), de Blaise Pascal (1623 - 1662) et d'Emmanuel Kant des réflexions qui inviteraient à en faire des ancêtres de l'intuitionnisme. Dans ses *Règles pour la direction de l'esprit* (1628), Descartes écrit :

Nous allons énumérer ici tous les actes de notre entendement, par lesquels nous pouvons parvenir à la connaissance des choses sans crainte d'erreur ; il n'y en a que deux : l'intuition et la déduction. Par *intuition* j'entends, non pas le témoignage changeant des sens ou le jugement trompeur d'une imagination qui compose mal son objet, mais la conception d'un esprit pur et attentif, conception si facile et si distincte qu'aucun doute ne reste sur ce que nous comprenons ; ou, ce qui est la même chose, la conception d'un esprit ferme et attentif, qui naît de la seule lumière de la raison et qui, étant plus simple, est par la suite plus sûre que la déduction même, qui pourtant elle aussi ne peut pas être mal faite par l'homme, comme nous l'avons remarqué précédemment. (*Règle III*)

De son côté, Pascal écrivait dans *De l'esprit géométrique et de l'art de persuader* (1658) :

Quelque mouvement, quelque nombre, quelque espace, quelque temps que ce soit, il y a en a toujours un plus grand et un moindre [...]. Toutes ces vérités ne se peuvent démontrer, et cependant ce sont les fondements et les principes de la géométrie. Mais comme la cause qui les rend incapables de démonstration n'est pas leur obscurité mais au contraire leur ex-

trême évidence, ce manque de preuve n’est pas un défaut, mais plutôt une perfection.

D’où l’on voit que la géométrie ne peut définir les objets ni prouver les principes ; mais pour cette seule et avantageuse raison, que les uns et les autres sont dans une extrême clarté naturelle, qui convainc la raison plus puissamment que le discours. (*Section I*)

Dans sa *Critique de la raison pure* (la seconde édition est de 1787), Kant expose une thèse selon laquelle nos conceptions de l’espace et du temps sont des intuitions pures qui guident a priori l’esprit humain dans l’organisation des perceptions reçues par l’intermédiaire des sens.

Mais, plus encore que ces vénérables prédécesseurs, c’est le mathématicien allemand Leopold Kronecker (1823 – 1881) qui orienta de manière décisive les idées de l’école intuitionniste. Kronecker, une vraie teigne, soit dit en passant, mettait en doute la validité des preuves d’existence, quand elles étaient incapables de fournir un moyen explicite soit pour construire les êtres mathématiques dont on prétendait avoir démontré l’existence, soit pour en déterminer la valeur.

On appelle *nombre algébrique* tout nombre qui peut être obtenu comme racine d’une équation à coefficients entiers et *nombre transcendant* tout nombre réel qui n’est pas algébrique. (Comprenons que la transcendance des mathématiciens n’a rien à voir avec celle des philosophes et des théologiens.) Cantor avait démontré que la cardinalité de l’ensemble des nombres transcendants était strictement supérieure à celle de l’ensemble des nombres algébriques, même si ce dernier ensemble comprenait une infinité d’éléments. Il avait, en étudiant la cardinalité des ensembles infinis, introduit une arithmétique nouvelle portant sur des nombres qui seront appelés *transfinis*. Pour Kronecker, ces travaux n’étaient pas des mathématiques, mais des élucubrations mystiques.

En 1882, Ferdinand Lindemann (1852 – 1939) avait établi que π appartient à cette classe des nombres réels transcendants. Mais sa preuve était de nature existentielle et ne fournissait pas un procédé explicite pour calculer la valeur de π . Kronecker lui fit la remarque : « À quoi sert un pareil travail, puisque de tels nombres irrationnels

n’existent pas ? » En fait, Kronecker ne niait pas l’existence de tous les nombres irrationnels, mais seulement celle des nombres pour lesquels on ne possédait pas un moyen effectif d’en calculer la valeur. Ainsi admettait-il l’existence d’un nombre irrationnel comme

$$\sqrt{2}$$

pour lequel on connaît des processus arithmétiques bien définis permettant d’en calculer la valeur avec autant de précision qu’il nous plaira.

On peut certes, en faisant appel à des séries infinies, calculer la valeur de $\sqrt{2}$ avec autant de décimales que l’on veut, mais Kronecker refusait d’admettre la validité des raisonnements qui justifient le développement de ces séries. On devine jusqu’à quel point une telle position mettait en péril les résultats acquis en analyse mathématique à la fin du XIX^e siècle. Sans qu’il en portât officiellement le nom, on peut dire qu’avec Kronecker le mouvement intuitionniste était né.

Dans *Science et méthode* (1908), Henri Poincaré (1854 – 1912) résumera l’essentiel des critiques qu’il n’avait cessé de proférer à l’adresse des travaux de Cantor. Estimant qu’il était inutile de définir les entiers naturels et d’appuyer leurs propriétés sur une théorie axiomatisée, il s’attaquait aussi à Giuseppe Peano (1858 – 1932) qui avait élaboré une axiomatisation de l’arithmétique. Il reproche à ce dernier d’utiliser pour développer cette axiomatique un langage tarabiscoté — qu’il s’amuse à nommer le *péanien* — et une approche qu’il juge inutile, obscure, artificielle et, parfois même autoréférente et contradictoire. Il n’a pas de peine à se moquer aussi de Cesare Burali-Forti, un assistant de Peano, qui, dans un article intitulé *Una questione sui numeri transfiniti* (Une question sur les nombres transfinis) avait défini comme suit le nombre 1 :

$$1 = \iota T' \{ Ko \cap (u, h) \in (u \in Un) \}.$$

« Voilà, commente malicieusement Poincaré, une définition du nombre 1 éminemment propre à donner une idée de ce nombre aux personnes qui n’en auraient jamais entendu parler. » C’est un direct

dans les gencives des logicistes, et une jolie passe (au sens sportif du terme) en direction des intuitionnistes. Signalons que l'étude des nombres transfinis qu'avait faite Burali-Forti l'avait conduit à la formulation d'un paradoxe qui s'était ajouté à ceux dont nous avons précédemment parlé.

Dans la première décennie du XX^e siècle, de jeunes loups aussi prometteurs pour l'école mathématique française que René Baire, Émile Borel et Henri Lebesgue s'opposèrent farouchement à l'axiome du choix qu'Ernst Zermelo — nous en reparlerons — venait d'introduire dans son axiomatisation de la théorie des ensembles, parce que cet axiome n'indiquait aucun moyen effectif de construire l'ensemble dont il postulait l'existence. À ce titre, on peut affirmer qu'à l'instar de Poincaré ils appartenrent aux marges de l'intuitionnisme, puisqu'ils apportaient à leur tour par ce refus de l'eau au moulin de cette doctrine. Mais ils n'appartinrent jamais, à proprement parler, à cette école, d'autant plus, comme il apparaîtra par la suite, que des résultats importants obtenus par Borel et Lebesgue au moyen de méthodes classiques seront contestés par le courant intuitionniste officiel.

Mais ce ne sont là que les précurseurs de celui qui allait associer son nom de manière définitive à cette école de pensée : le Néerlandais Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881 — 1966). Sa thèse de doctorat, intitulée *Sur les fondements des mathématiques* (1907), inaugure une longue carrière tout entière consacrée à défendre la philosophie qui colore sa conception des mathématiques. On peut partager cette carrière en trois périodes. La première, qui suivit immédiatement sa soutenance de thèse, s'attaque vigoureusement aussi bien au logicisme de Russell qu'aux théories de Cantor et de Hilbert. La deuxième période, qui couvrira essentiellement les années '20, tente de reconstruire les principales théories mathématiques, notamment l'analyse, en tenant compte des exigences de l'intuitionnisme. Enfin, au cours des années '40, on le voit développer sa théorie du *sujet créatif*, qui radicalise, s'il se peut, ses positions initiales et se voudrait une théorie mathématique de la création mathématique. Si ces réflexions présentent quelque intérêt pour l'historien de la philosophie, elles en offrent bien peu aux mathématiciens mathématisants.

Pour Brouwer, les mathématiques sont une activité qui se situe dans l'esprit humain, qui n'a d'existence qu'en lui, et qui est donc tout à fait indépendante du monde réel. C'est une vue qui n'est pas tellement éloignée de la pensée platonicienne. L'esprit est, selon Brouwer, capable de percevoir de manière immédiate, *intuitive*, certaines vérités, notamment à propos des mathématiques, sans que n'intervienne l'expérience sensible. La connaissance des entiers naturels et de leurs propriétés appartiendrait à ce type de vérité. Kronecker, qui fut pour lui un maître à penser non avoué, n'avait-il pas écrit : « Dieu a créé les entiers naturels, alors que le reste est l'œuvre des hommes. » Selon Brouwer, la connaissance immédiate et spontanée des entiers naturels et de leurs propriétés s'appuie sur une intuition encore plus fondamentale : celle du temps à l'intérieur duquel le moment présent crée une dualité quand il établit un partage entre ce qui précède et ce qui suit. De cette intuition de la dualité naîtrait par dissociation celle d'unité. De la dualité associée à l'unité naîtrait la *trialité*, et ainsi de suite. C'est par un tel moyen, affirme Brouwer, que l'esprit humain appréhenderait successivement de manière intuitive chaque entier naturel.

Mais si chaque entier naturel peut être *construit* par un tel processus mental, cela n'entraîne pas, selon Brouwer, qu'il en soit de même pour l'ensemble des entiers naturels, car celui-ci n'admet l'infini que dans la mesure où il apparaît sous une forme potentielle. Comme quand on considère une variable qui *tend vers l'infini*, c'est-à-dire qui prend des valeurs aussi grande que l'on veut. Il refuse de considérer comme ayant une existence valide un infini qui serait réalisé dans un hypothétique ensemble contenant la totalité des entiers naturels. On comprend bien qu'un tel point de vue était incapable de s'accommoder des travaux de Cantor aux antipodes desquels il se situait. On comprend aussi que cette approche impose de sévères contraintes à l'utilisation de certaines preuves par induction.

Du concept d'entier naturel, il est évidemment facile de passer à celui de nombre rationnel, puisque de tels nombres sont conçus comme le rapport de deux entiers naturels. Mais, en revanche, le passage aux nombres réels exige un saut herméneutique passablement plus vertigineux. L'approche de Brouwer sur ce point connaîtra des fluctuations. En un premier temps, il voudra voir dans le *continu* un objet immédiatement perçu par l'esprit, tout comme les entiers natu-

rels. Plus tard, il introduira, pour appréhender les réels, le concept assez vaporeux de *suite de formation libre*, autrement dit, il voudra réduire le continu à des suites de nombres antérieurement définis.

L’un des aspects les plus troublants de la doctrine de Brouwer est la remise en question du *principe du tiers exclu*, qui, depuis l’Antiquité grecque, s’appliquait sans discussions aux divers champs où s’exerce la pensée réflexive. Rappelons que ce principe nous assure que tout énoncé A est ou bien vrai ou bien faux (auquel cas la négation de A est vraie), et qu’en dehors de ces deux-là il n’existe pas de troisième possibilité. Ce principe, bien entendu, ne doit pas être confondu avec le principe de contradiction selon lequel un énoncé ne peut pas être à la fois vrai et faux. Brouwer restreint radicalement les conditions dans lesquelles le principe du tiers exclu peut légitimement s’appliquer. Renoncer à ce principe, c’est en même temps renoncer aux preuves par l’absurde qui constituent une arme particulièrement efficace dans l’arsenal du mathématicien. Brouwer consent certes à reconnaître la validité du principe du tiers exclu dans certains cas particuliers, mais cette validité cesse, selon lui, dès que l’on prétend l’appliquer à des ensembles infinis.

Pour les intuitionnistes, la généralisation du principe du tiers exclu résulte d’une extrapolation imprudente qui repose sur le seul fait que ce principe n’a jamais été mis en défaut dans la vie de tous les jours, pour la bonne raison que la vie de tous les jours ne manie que des ensembles finis et discrets d’objets. Et c’est parce que l’on a voulu, disent-ils, appliquer ce principe à certains ensembles infinis que des paradoxes comme ceux de Cantor ou de Russell sont apparus. Il est vrai qu’en refusant d’admettre la validité du principe du tiers exclu quand il est appliqué à des objets infinis on ne peut plus voir apparaître de tels paradoxes. Mais le remède risque alors d’être encore plus détestable que le mal.

David Hilbert, dont nous parlerons tout à l’heure, écrivait en 1922 : « Faire des mathématiques en se privant du principe du tiers exclu, c’est comme, pour un boxeur, se présenter dans l’arène avec les bras attachés derrière le dos ou, pour un astronome, se priver de son télescope. » Et il ajoutait : « Les intuitionnistes cherchent à détruire et à

défigurer les mathématiques. » C'étaient pour lui des ennemis publics numéro un.

Après avoir si radicalement critiqué les autres écoles mathématiques, avoir ébranlé la logique millénaire, avoir fait sombrer des pans entiers de disciplines aussi nobles et essentielles que l'analyse mathématique, Brouwer se devait de réparer, si c'était possible, une partie tout au moins des dommages qu'il avait causés. Il s'attela à cette tâche, au début avec autant d'enthousiasme qu'il en avait mis à mettre la pagaille dans l'univers mathématique, puis, on le sent bien, avec une lassitude croissante à mesure qu'il se rendait compte des difficultés dont son entreprise était hérissée.

En 1918, il propose sa propre version d'une théorie des ensembles (qui deviennent sous sa plume des *espèces*). En 1919, il apprête la théorie de la mesure à la sauce intuitionniste et, en 1923, c'est à la théorie des fonctions qu'il s'attaque - dans tous les sens que l'on voudra bien donner à ce verbe. Mais, chaque fois, les restrictions radicales qu'il s'est imposées l'obligent à chercher des preuves qui sont la plupart du temps horriblement tarabiscotées, et à déformer des notions consacrées et des résultats bien établis. Et tout cela sans qu'il parvienne à reconstruire de manière vraiment satisfaisante les édifices qu'il avait antérieurement démolis.

J'en veux pour exemple un théorème intuitionniste qui ne peut manquer de faire bondir tout mathématicien qui n'est pas un fervent disciple de cette école : *Toute fonction réelle est continue*. Il existe pourtant, on le sait bien, des fonctions réelles dites en escalier, comme celle qui est illustrée dans le diagramme que voici :

Il est évident que cette fonction ne peut pas être continue. Comment Brouwer parvient-il alors à justifier son théorème ? Tout simplement en définissant les concepts de nombre réel, de fonction réelle et de fonction continue de telle sorte que le théorème devienne vrai pour de tels concepts. Mais on aura compris que ces définitions ressemblent fort peu à celles que l'on rencontre en analyse classique. À l'instar de Kronecker niant l'existence des nombres transcendants, les intuitionnistes pur sucre considéreront comme dénué de signification tout théorème des mathématiques classiques qu'il est impossible de démontrer en respectant rigoureusement les interdits de leur école. Certes, il existe des théorèmes qu'il est possible de démontrer tout autant par des techniques classiques qu'intuitionnistes. Mais alors que, dans les cas classiques, les preuves sont habituellement simples, élégantes et concises, les démonstrations intuitionnistes sont tordues, brumeuses et interminables. On ne sera donc pas étonné que le radicalisme agressif de Brouwer et le caractère obscur et discutable de ses théories aient attiré peu de disciples vers l'école intuitionniste.

Néanmoins, on concédera volontiers aux intuitionnistes qu'il est préférable, chaque fois que cela est possible, de posséder une preuve constructive plutôt qu'une preuve purement existentielle d'un énoncé mathématique. Mais il vaut mieux pourtant posséder une preuve exis-

tentielle que pas de preuve du tout. Et surtout les preuves constructives ne doivent pas être recherchées au prix d’un chambardement radical des concepts et des méthodes qu’utilisent des disciplines aussi bien fondées et fécondes, par exemple, que l’analyse mathématique. Bref, on peut compter l’intuitionnisme au rang de ces nombreux systèmes qui soulèvent d’excellentes questions, mais qui leur apportent dans la plupart des cas de bien mauvaises réponses.

LE FORMALISME

[Retour à la table des matières](#)

Le développement des géométries non euclidiennes au cours du XIX^e siècle bouleversa la façon dont les mathématiciens avaient jusque-là conçu les diverses théories dont ils faisaient l’étude. Comme nous l’avons déjà mentionné, on avait, en dépit de certaines réticences, généralement admis comme allant de soi le postulat d’Euclide voulant qu’il soit toujours possible de tracer à partir d’un point situé hors d’une droite une (et une seule) parallèle à cette droite. On s’aperçut alors qu’en prenant le contre-pied du postulat d’Euclide on obtenait des géométries différentes, mais apparemment aussi cohérentes que celle d’Euclide. On dut devant ce fait se résigner à conclure que les axiomes et les postulats d’une théorie mathématique ne sont pas forcément des vérités évidentes, et qu’un système d’axiomes doit être essentiellement jugé en fonction de la cohérence et de la complétude de la théorie qu’il engendre.

On dira qu’une théorie est *cohérente* s’il est impossible d’y démontrer à la fois un énoncé et la négation de cet énoncé, autrement dit si elle est non contradictoire. On dira que cette théorie est *complète* si, pour toute proposition A de cette théorie, il est possible de démontrer soit A , soit la négation de A . On voit facilement le lien que les concepts de cohérence et de complétude entretiennent respectivement avec le principe de contradiction et le principe du tiers exclu.

C'est au mathématicien allemand David Hilbert (1862 – 1943) que l'on doit l'élaboration des principes de l'école formaliste, qui se donnera pour tâche d'étudier ces questions et d'appliquer les résultats de cette étude à la résolution des problèmes soulevés par les paradoxes apparus au sein de la théorie des ensembles. Dans une communication qu'il avait présentée en 1900 lors d'un congrès tenu à Paris, Hilbert énumérait un catalogue de 23 problèmes qu'il jugeait essentiel de résoudre dans les meilleurs délais. Parmi ceux-là, il comptait la démonstration de la cohérence des mathématiques (et, en premier lieu, celle de l'arithmétique), et la démonstration de l'hypothèse du continu, formulée par Cantor dès 1877, qui affirme qu'il n'y a pas de nombres transfinis compris entre $\aleph_0$, la cardinalité des entiers naturels, et c , la cardinalité du continu. Et il terminait sa communication par ces mots :

Les plus évocatrices et les plus remarquables réalisations du siècle dernier [...] sont, me semble-t-il, la formulation arithmétique du concept de continu dans les travaux de Cauchy, de Bolzano et de Cantor, et la découverte de la géométrie non euclidienne par Gauss, Bolyai et Lobatchevski.

Puis, retenu par d'autres recherches, Hilbert s'était, au cours des décennies qui suivront, contenté d'observer à partir de la coulisse les grandes manœuvres des logicistes et des intuitionnistes et de formuler des remarques de nature générale sur la manière de traiter la question de la cohérence et de la complétude des théories mathématiques. Mais, dans les années 20, il en viendra à formuler de manière détaillée les remèdes qu'il a conçus pour résoudre la crise des fondements des mathématiques. Dans un article intitulé *Über das Unendliche* (Sur l'infini), publié en 1926, il écrivait : « Le but de ma théorie est d'établir une fois pour toutes la certitude des méthodes mathématiques. »

Se démarquant des logicistes, Hilbert affirmait avec raison que les théories mathématiques doivent se développer en faisant appel aussi bien à des axiomes qui appartiennent à la logique qu'à des axiomes qui se situent en dehors d'elle. Il affirmait aussi que la façon la plus prudente de traiter des théories mathématiques est de les voir non comme un ensemble de données qui appartiennent à la réalité immédiatement perceptible, — c'est une leçon apprise auprès des géométries non euclidiennes — mais comme des systèmes formels de signes

soumis à des règles qui ressemblent aux règlements d’un jeu et aux lois syntaxiques d’un langage.

Pour Hilbert, une preuve est un ensemble de formules, c’est-à-dire de suites de symboles, qui s’enchaînent les unes aux autres conformément à des règles d’inférence, et qui aboutissent à une formule finale, celle dont cet enchaînement de formules constitue précisément la preuve. Dans une théorie mathématique, une formule est *vraie* si et seulement si ou bien elle est un axiome ou bien elle est obtenue à partir des axiomes au moyen d’une preuve. La tâche du mathématicien est d’expliciter pour une théorie donnée le plus grand nombre possible de formules vraies dans cette théorie, sinon la totalité d’entre elles.

Un problème demeure cependant : même si, grâce à ces exigences rigoureuses, nous pouvons nous assurer de manière effective de la véracité d’un énoncé particulier, rien ne nous garantit que cette théorie est cohérente. Certes, on possédait à cette époque des preuves sinon absolues, tout au moins relatives, de la cohérence de certaines théories mathématiques. Par exemple, Hilbert lui-même avait établi que si l’on admet la cohérence de l’arithmétique, on peut alors démontrer la cohérence de la géométrie euclidienne.

Mais voilà : pour s’assurer hors de tout doute raisonnable que la géométrie euclidienne est cohérente, il faudrait établir au préalable la cohérence de l’arithmétique. Supposons que l’arithmétique ne soit pas une théorie cohérente. Il existerait alors une proposition P telle que l’on pourrait y démontrer aussi bien P que $\text{non-}P$, sa négation. Nous savons qu’un de ces deux énoncés est faux, et comme la logique nous l’enseigne, du faux on peut déduire n’importe quoi, même le vrai ! *Ex falso quodlibet sequitur* (n’importe quoi peut s’ensuivre du faux), disait un adage des logiciens médiévaux. Désignons par $\Rightarrow$ l’opérateur d’implication logique. Si P est faux, alors $P \Rightarrow (1 = 0)$. En revanche, si $\text{non-}P$ était faux, on aurait par ailleurs $\text{non-}P \Rightarrow (1 = 0)$. Donc, si l’arithmétique n’était pas une théorie cohérente, où l’on pourrait démontrer aussi bien P que $\text{non-}P$, on pourrait également y démontrer la proposition $1 = 0$, qui est évidemment fausse. Pour s’assurer que l’arithmétique est une théorie cohérente, il suffirait donc d’établir qu’il est impossible d’y démontrer à partir de ses axiomes que $1 = 0$.

Ainsi, croyait Hilbert, serait-on protégé contre l'apparition éventuelle de paradoxes au cours du développement de l'arithmétique.

Afin de réaliser ce programme, Hilbert, flanqué de quelques-uns de ses plus brillants étudiants, élaborait ce qui prendra le nom de *Beweis-theorie* (théorie de la preuve), puis celui de *métamathématique*. C'était une théorie dont le but essentiel était d'établir la cohérence et la complétude de toutes les théories mathématiques et de résoudre enfin les difficultés rencontrées au début du siècle par l'apparition des paradoxes de la théorie des ensembles. Ainsi, tout énoncé significatif d'une théorie (ou sa négation) pourrait être démontré, et il n'y aurait plus de propositions indécidables. Dans cette approche, on appelait *théorie objet* la théorie ainsi étudiée, tandis que le mot *métathéorie* désignait la théorie chargée de faire l'analyse de la théorie objet.

Hilbert voulut par ailleurs que les caractéristiques d'une métathéorie soient les plus simples et les plus rigoureuses possible, afin de rencontrer les exigences des autres écoles, en particulier celles des intuitionnistes. Les concepts et les preuves devaient être au-dessus de tout soupçon. En métamathématique, les preuves d'existence devaient être de nature constructive. On laissait de côté les preuves par l'absurde, l'induction transfinie et les ensembles infinis. Ou si on traitait de tels ensembles, ce ne devait être que sous la forme de suite de symboles apparaissant comme tous les autres à l'intérieur de formules quelconques. On qualifiait de *finitistes* de tels procédés.

En dépit de ces précautions, le formalisme ne put éviter les critiques de ses écoles rivales. Russell reprochera à Hilbert de vider les mathématiques de leur signification, en voulant n'y voir que des jeux abstraits de manipulations de symboles, oubliant qu'il avait lui-même écrit en 1901 : « Les mathématiques sont une discipline où l'on ne sait pas ce dont on parle ni si ce que l'on en dit est vrai. » Les intuitionnistes, pour leur part, reprochèrent aux formalistes, en dépit des prudentes balises qu'ils avaient mises en œuvre, de vouloir sauver à tout prix des théories mathématiques dépourvues de toute valeur et de toute validité. Reprenant les critiques de Russell, ils diront : « À la question de savoir où doit se situer la rigueur mathématique, l'intuitionniste répond : dans l'esprit humain, tandis que le formaliste répond : sur une feuille de papier. » Ce reproche de vouloir réduire les mathémati-

ques à des manipulations de symboles dénués de signification est en vérité injuste. Ce n'est que dans les cas où ils se penchent sur les propriétés des systèmes mathématiques, comme la cohérence et la complétude, que les formalistes adoptent un tel point de vue. Quand ils font des mathématiques, comme tout un chacun, ils y voient non pas un simple jeu symbolique, mais une science lourde de son contenu objectif.

Les adversaires de l'école de Hilbert se devaient de reconnaître qu'ils n'avaient pas réussi, pour leur part, à apporter des solutions véritables aux problèmes de la complétude et de la cohérence des théories mathématiques. Le formalisme, lui, s'était attaqué de plein front à la résolution de ces questions. À la veille des années 30, la complétude et la cohérence du calcul propositionnel étaient établies, et l'on avait réussi à faire de même pour des portions du calcul des prédicats du premier ordre, même si ces questions demeuraient en suspens pour la totalité de ce calcul. Bref, les théories fondamentales de la logique mathématique semblaient se prêter favorablement au programme conçu par l'école formaliste.

Quant à la cohérence et à la complétude de l'arithmétique, la question était sur le tapis, et n'avait pas encore été résolue. On était pourtant parvenu à démontrer la cohérence et la complétude de théories se rapportant à des formes restreintes de l'arithmétique. La rigueur de ce programme et les résultats partiels qu'on avait obtenus laissaient espérer qu'on était engagé dans la bonne voie. Ainsi écrivait Hilbert : « Ce que nous avons éprouvé à deux reprises, d'abord les paradoxes du calcul infinitésimal, puis les paradoxes de la théorie des ensembles, ne peut plus se manifester une troisième fois, et ne se manifestera jamais plus. » C'était, en vérité, une déclaration imprudente. Car la méthode et le programme que Hilbert avait conçus devaient cependant révéler, non seulement dans l'étude des systèmes mathématiques, mais, par analogie, dans toute discipline relevant de la raison et du discours humains, des limitations importantes qu'il était loin de soupçonner. Mais avant de traiter ce point, il serait bon de revenir en arrière et de parler de la quatrième école mise en place pour résoudre la crise provoquée par les paradoxes apparus dans la théorie de Cantor.

L'AXIOMATISATION DE LA THÉORIE DES ENSEMBLES

[Retour à la table des matières](#)

Ernst Zermelo (1871 – 1953), un ancien étudiant de Hilbert, eut l'idée, pour résoudre cette crise, de recourir au prudent appareil de l'axiomatique, qui avait, depuis les *Éléments* d'Euclide, efficacement encadré le développement de maintes théories mathématiques. Zermelo voulait par ses axiomes opérer un tri entre des collections vagues sur lesquelles il serait imprudent pour le mathématicien d'espérer fonder un raisonnement sain et des ensembles de bon aloi, générés par des processus éprouvés qu'on appliquerait à des objets à la qualité reconnue. Ainsi, pensait Zermelo, en contrôlant les modes de formation des ensembles empêcherait-on l'apparition de ces collectivités mal formées qui avaient provoqué la naissance des paradoxes.

C'est en 1908 que Zermelo faisait paraître son axiomatique. Par la suite, plusieurs mathématiciens s'attelèrent à leur tour à la formulation de tels systèmes d'axiomes. Parmi celles-là, les chercheurs, tout autant que les auteurs de manuels, favoriseront une version améliorée des axiomes de Zermelo énoncée en 1922 par Abraham A. Fraenkel, parce qu'elle se prête à un développement particulièrement élégant et simple de la théorie. On l'appelle la *théorie de Zermelo-Fraenkel*, et on la désigne plus simplement par le sigle *ZF*. La plupart des axiomes énoncés dans *ZF* furent en général acceptés de bon gré par la communauté mathématique. Énonçons d'abord ceux-là avec, s'il y a lieu, quelques commentaires.

L'axiome d'*extensionnalité* affirme que deux ensembles sont égaux si et seulement s'ils possèdent les mêmes éléments. Les axiomes suivants affirment qu'il existe un ensemble qui ne possède aucun élément (*ensemble vide*), qu'il est possible de former un ensemble constitué de deux éléments (*paire non ordonnée*), de former un ensemble qui est la réunion des éléments d'un ensemble d'ensembles, et

de former un ensemble constitué de tous les sous-ensembles d'un ensemble donné.

On se rappellera que les paradoxes de Cantor et de Russell s'étaient manifestés à la suite de l'utilisation sans contraintes du schéma de compréhension qui associait à n'importe quelle propriété P l'ensemble de tous les objets susceptibles de posséder cette propriété. Pour éviter que de telles difficultés n'apparaissent, Zermelo introduira un axiome qui encadre l'utilisation du schéma de compréhension en exigeant que la propriété ne s'applique qu'aux éléments d'un ensemble dûment formé au préalable par des procédés autorisés par l'axiomatique de la théorie. Ainsi prévient-on l'apparition d'ensembles exubérants comme l'ensemble de tous les ensembles ou l'ensemble de tous les ensembles qui ne se contiennent pas eux-mêmes comme éléments. Il existe aussi une forme plus forte de ce schéma due à Fraenkel qu'on appelle *axiome de remplacement*. En raison de son caractère particulièrement technique, nous ne nous attarderons pas à en indiquer explicitement la teneur, nous contentant de signaler qu'il permet, tout comme le schéma de compréhension de Zermelo, de contrôler efficacement le pedigree des ensembles dont on traite.

L'*axiome de régularité* affirme que si A est un ensemble non vide, alors il existe un élément x de A qui ne possède pas d'éléments en commun avec A . Cet axiome qui ne trouvera sa forme définitive qu'en 1930 n'est pas utilisé dans la pratique usuelle des mathématiciens. Il n'en reste pas moins essentiel, parce qu'il rend impossible la démonstration d'énoncés comme $A \in A$ ou $A \notin A$, qui ont été à la source des paradoxes logiques de la théorie des ensembles au début du XX^e siècle. Il prévient aussi la démonstration d'appartenances circulaires de la forme $A \in B$ et $B \in A$.

L'*axiome de l'infini* assure l'existence de l'ensemble des ordinaux finis, que l'on assimilera aux entiers naturels intuitivement perçus par Brouwer et compagnie. On notera que, à l'exception de ce dernier, tous les axiomes énoncés jusqu'ici sont de caractère constructif, et qu'ils répondent tout à fait aux exigences des intuitionnistes, si l'on consent à négliger le fait que l'on n'a pas imposé de restriction sur la cardinalité des ensembles concernés, qui peuvent donc être infinis.

Mais, parmi les axiomes proposés par Zermelo, il en est un que nous avons gardé pour la fin, qui, lui, suscitera de puissants remous à travers la communauté mathématique. C’est l’*axiome du choix* qui s’énonce comme suit : étant donné un ensemble A d’ensembles non vides, il existe un ensemble C qui est formé en prenant un et un seul élément dans chacun des ensembles qui composent A . Autrement dit, C est formé en *choisissant* un élément dans chacun des ensembles qui appartiennent à A .

Le principal reproche qui fut adressé à cet axiome vient de ce qu’il est de caractère existentiel plutôt que constructif, puisqu’il se contente d’affirmer l’existence de C , sans fournir de procédé explicite pour choisir les éléments qui le composent. Certains mathématiciens auraient accepté des formes restreintes de l’axiome comme celle, par exemple, qui exigerait de tous les ensembles composant l’ensemble C qu’ils aient une cardinalité finie. Mais d’autres mathématiciens se refusaient à toute concession de ce type : ou bien on fournit preuve en main un processus explicite pour choisir les éléments, ou bien, il n’y a pas d’ensemble C qui tienne.

Bien que sa validité fût l’objet de longues et violentes querelles, avec le temps, cet axiome gagnera des points et conquerra à la force du poignet sa place au soleil des axiomes. En 1939, Kurt Gödel montre qu’une théorie qui serait cohérente sans l’axiome du choix le demeurerait après que cet axiome se fut ajouté aux autres. Puis en 1963, Paul Cohen démontre que l’axiome du choix est indépendant des autres axiomes qu’avait au départ formulés Zermelo, et par conséquent, qu’il ne peut en être déduit.

À la suite de ces résultats rassurants, les craintes soulevées par la formulation de l’axiome du choix se sont progressivement apaisées. Et l’on verra apparaître au cours du siècle maints théorèmes importants que l’on ne saurait pas démontrer sans faire appel à l’axiome du choix, tandis qu’un bon nombre d’entre eux se révéleront logiquement équivalents à cet axiome. On entend par là que si on joignait n’importe lequel d’entre eux aux huit premiers axiomes de ZF , il serait alors possible d’en déduire l’axiome du choix lui-même. En particulier, on peut démontrer que l’axiome du choix est logiquement

équivalent à l’axiome multiplicatif qui avait été formulé par Russell et Whitehead dans leurs *Principia mathematica*.

Nous avons déjà mentionné l’hypothèse du continu formulée par Cantor. On tenta durant longtemps d’en faire une conséquence des neuf axiomes de ZF , mais sans y parvenir. Il existe une forme plus forte de cette hypothèse, appelée *hypothèse généralisée du continu*, qui s’énonce comme suit : *étant donné un ensemble infini A , il n’existe pas d’ensemble dont la cardinalité se situerait entre celle de A et celle de $P(A)$, l’ensemble de tous les sous-ensembles de A* . En 1939, Gödel démontrait que si l’on admettait la cohérence de la théorie générée par les axiomes de ZF , alors la théorie obtenue en ajoutant à ces axiomes l’hypothèse généralisée du continu demeurerait cohérente.

Les axiomes de ZF permirent d’explorer tout aussi bien l’arithmétique des entiers naturels que les propriétés des opérations effectuées avec des nombres transfinis. On sait par ailleurs qu’il est possible à partir des entiers naturels de définir et d’étudier les diverses variétés de nombres que l’histoire des mathématiques nous a léguées : entiers relatifs, nombres rationnels, réels et complexes. Donc l’arithmétique, l’analyse et bien d’autres théories s’appuient sur la théorie des ensembles. Par l’intermédiaire de la géométrie analytique, la géométrie repose à son tour sur l’analyse. En somme, on peut dire que la plus grande partie des mathématiques dépend de la théorie des ensembles. Il serait donc extrêmement souhaitable de trouver une réponse aux deux questions suivantes : (a) la théorie des ensembles est-elle cohérente ; (b) la théorie des ensembles est-elle complète ?

Si la réponse à ces deux questions était positive, alors les problèmes de cohérence et de complétude des autres théories mathématiques deviendraient plus faciles à résoudre, et l’on se contenterait, pour la cohérence par exemple, de recourir à des preuves de cohérence relative. Si une théorie Y s’appuie sur une théorie X , il suffirait de démontrer un théorème qui s’énoncerait comme suit : *si l’on admet que la théorie X est cohérente, alors il s’ensuit que la théorie Y l’est également*. La cohérence de X , si elle avait au préalable été démontrée, entraînerait la cohérence de Y . C’était ce que croyait Hilbert à la veille des années 30. La cohérence des théories mathématiques reposait

donc sur la cohérence de la théorie des ensembles, cohérence dont la démonstration, pensait-il, avec un effort suffisant finirait, grâce à la métamathématique, par être bientôt dans la poche.

EN ATTENDANT GÖDEL

[Retour à la table des matières](#)

Mais Kurt Gödel (1906 - 1978) vint, et les terribles résultats qui apparurent sous sa plume inventive fixèrent les bornes qu’il convient désormais d’assigner au programme optimiste de Hilbert, en indiquant par deux théorèmes clés ce que Jean Ladrière appelait les *limitations internes des formalismes*. Ou peut-être faudrait-il, pour être rigoureux, les appeler plutôt des *métathéorèmes*, puisqu’ils appartenaient à des parties d’une métathéorie chargée d’étudier l’arithmétique en tant que théorie objet. Ces (méta)théorèmes affirmaient :

- 1.- Quels que soient les axiomes que l'on admette pour construire une théorie ayant au moins la complexité de l'arithmétique des entiers naturels, il existera toujours au moins un énoncé vrai qu'il sera impossible de démontrer à partir de ces axiomes.
- 2.- Il est impossible de démontrer à l'intérieur d'une théorie ayant au moins la complexité de l'arithmétique des entiers naturels la non-contradiction de cette théorie.

Autrement dit, ce que nous apprend (1), c’est que l’arithmétique est une théorie incomplète. Et (2) nous fait savoir que pour établir la cohérence d’une théorie *A*, il faut concevoir une métathéorie *B* dont l’un des métathéorèmes se rapportera à la cohérence de *A*. Mais alors se posera le problème d’établir la cohérence de *B* sans laquelle on ne peut être assuré de la validité du résultat qui établissait la cohérence de *A*. Mais pour établir la cohérence de *B*, il faudra recourir à une métathéorie *C* dans laquelle on établira la cohérence de *B*. Et ainsi de suite. On se trouve donc menacé de devoir recourir à une série infinie de métathéories dont chacune permet d’établir la cohérence de celle

qui la précède, mais dont la cohérence propre dépend de celle qui la suit. Y a-t-il quelque part une métathéorie ultime dont la cohérence va de soi, et sur laquelle puisse se fonder la cohérence de toutes les autres théories et métathéories ? Voilà la question.

Vous me demanderez : comment Gödel s'y est-il pris pour démontrer ces (méta)théorèmes ? Il me serait évidemment impossible de vous répondre de manière exhaustive et détaillée, car il faudrait pour cela reprendre les 25 pages bien tassées, au contenu très technique, de l'article dans lequel Gödel établissait ces résultats. Mais je vais tenter de vous laisser voir les grandes lignes du raisonnement qu'il a suivi.

Vous n'avez sans doute pas oublié le paradoxe d'Eubulide, qui disait : « La présente phrase est fausse. » Gödel eut l'idée de reprendre cet énoncé et d'y remplacer le mot *fausse* par le mot *indémontrable*. Il obtenait ainsi l'énoncé : « La présente phrase est indémontrable ». Supposons que, dans une théorie donnée - en l'occurrence il s'agissait de l'arithmétique -, on rencontre un tel énoncé. De deux choses l'une : ou bien cet énoncé est démontrable ou il ne l'est pas. S'il n'est pas démontrable, on en conclut que l'énoncé est vrai. Mais, malheureusement, c'est un énoncé vrai qu'il n'est pas possible de démontrer, donc, dans ce cas, la théorie serait *incomplète*. En revanche, s'il était démontrable, il s'ensuivrait que l'énoncé est faux. Donc il serait possible de démontrer dans cette théorie un énoncé faux, autrement dit la théorie serait *incohérente*. Ce qui est le mal ultime pour une théorie qui se prétend logique. Donc, si on tient à ce que l'arithmétique soit cohérente, puisque c'est d'elle qu'il s'agit, il faut se résigner à conclure qu'elle est incomplète : il existe en arithmétique des énoncés vrais qu'il est impossible de démontrer à partir des axiomes de cette théorie. L'incomplétude est le prix qu'il faut payer pour échapper aux tribulations de l'incohérence. On constate donc que, en remplaçant le mot *fausse* dans le paradoxe d'Eubulide par le mot *indémontrable*, on transforme un paradoxe en un énoncé subtil, mais fécond, puisqu'il est capable d'éclairer les rapports adverses et complémentaires qui existent entre les concepts de cohérence et de complétude.

Ainsi, armé de cette astucieuse idée, Gödel se lance dans une entreprise qui consiste à « arithmétiser » une métathéorie de l'arithmétique de manière à pouvoir formuler à l'intérieur de l'arithmétique un

énoncé qui affirme sa propre indémontrabilité. Essayons de préciser en quoi consiste cette « arithmétisation ».

On énumère d'abord les symboles dont on a besoin pour étudier l'arithmétique. Ce pourrait être, par exemple, le symbole '0', le signe d'égalité '=', les opérateurs logiques de négation et d'implication, les parenthèses, le symbole 's' qui représente le concept de *successeur*, etc. À chacun de ces symboles, on fait correspondre un entier. Supposons, par exemple, que l'on ait respectivement assigné aux symboles '0' et '=', les entiers 1 et 2. On pourrait alors songer à faire correspondre à la formule '0 = 0' la suite d'entiers (1 2 1). Mais Gödel préférera faire correspondre à une seule formule un seul nombre. Il déterminera ce nombre en prenant la succession des nombres premiers qu'il affectera d'exposants qui proviennent de la suite des entiers correspondant aux symboles de la formule. Ainsi, à la formule '0 = 0' correspondra l'entier $2^1 \cdot 3^2 \cdot 5^1$, soit 90. L'avantage de ce procédé découle du fait qu'il est alors toujours possible de vérifier si un entier correspond bien à une entité provenant de la métathéorie, et, s'il en est ainsi, de retrouver l'entité en question.

On sait qu'une preuve est formée d'une suite de formules enchaînées les unes aux autres par des règles d'inférence. Supposons que l'on ait une preuve formée d'une suite de quatre formules dont les entiers associés sont respectivement 270, 50, 130 et 800. L'entier que l'on fera correspondre à cette preuve sera $2^{270} \cdot 3^{50} \cdot 5^{130} \cdot 7^{800}$.

Par un tel procédé, Gödel réussit à appliquer de manière injective dans l'ensemble des entiers naturels la totalité des objets dont il a besoin pour faire la métathéorie de l'arithmétique : symboles, formules, axiomes, règles d'inférence, expressions numériques, preuves, etc. Appelons *nombre de Gödel* d'un tel objet l'entier naturel correspondant. (En parlant d'*application injective*, on entend qu'à deux objets distincts de l'arithmétique on fait correspondre par cette application deux nombres de Gödel distincts.) Ainsi, parmi tous les autres concepts de la métathéorie, tout métathéorème de l'arithmétique possèdera en propre son nombre de Gödel.

Et c'est ici que l'on atteint le point crucial du travail de celui-ci. De proche en proche, il parvient à construire un certain énoncé *G* dont le

nombre de Gödel est m et qui, dans la métathéorie, se formulerait comme suit : l'énoncé dont le nombre de Gödel est m est indémontrable. Autrement dit, G affirme sa propre indémontrabilité à partir des axiomes de l'arithmétique. Alors, reprenant l'argumentation de tout à l'heure, si l'on tient à la cohérence de l'arithmétique, il faudra conclure que l'énoncé G est *indémontrable si et seulement s'il est vrai*. Ce qui entraîne comme conséquence que l'arithmétique est incomplète, puisqu'il existe un énoncé vrai de cette théorie qui ne peut pas être démontré à partir de ses axiomes.

On pourrait se dire : puisque G ne peut pas être démontré à partir des axiomes de l'arithmétique, ne serait-il pas possible d'obtenir une théorie complète en ajoutant G aux autres axiomes de l'arithmétique. Hélas ! le procédé qui a permis de construire G peut être réutilisé pour construire un énoncé G' , qui est à son tour vrai et indémontrable dans la théorie obtenue en ajoutant G aux axiomes de l'arithmétique.

Pour démontrer le second de ses énoncés fondamentaux, Gödel construisit d'abord un énoncé A qui exprimait l'idée suivante : « L'arithmétique est une théorie cohérente », énoncé qu'il traduisit ensuite en termes arithmétiques. Puis il établit qu'à l'intérieur de l'arithmétique on peut démontrer que le nombre de Gödel de G est associé au nombre de Gödel de A par l'intermédiaire du nombre de Gödel d'une preuve. Autrement dit, si l'on admettait que l'on puisse à l'intérieur de l'arithmétique démontrer A , on pourrait alors y démontrer G . Ce qui contredit le fait que nous avons précédemment établi, à savoir que G est indémontrable.

Il semblerait donc que nous sommes finalement condamnés à accepter une insondable zone floue au plus profond des sources de notre connaissance. Il n'en fallait pas plus pour qu'Hermann Weyl, le mathématicien allemand qui avait été le compagnon de route des intuitionnistes, déclare avec un sourire en coin : « Dieu existe, puisque nous savons *intuitivement* que les mathématiques sont cohérentes, mais le diable existe aussi, puisque nous sommes incapables de démontrer cette cohérence. » J'ajouterais que si cela constitue une preuve de l'existence de Dieu et du diable, elle est de nature existentielle et non constructive ! Pour être intuitionniste, on n'en est pas

moins homme, pour parodier Tartuffe, et l’on ne peut pas toujours être cohérent avec ses principes.

Gödel, qui n’était pas un intuitionniste, nous oblige pourtant à nous rendre compte que tout n’était pas faux dans les principes de cette école, puisqu’il faut sans doute, pour soutenir en dernier recours la tâche des mathématiciens, nous résigner à faire la part de l’intuition, fût-elle réduite à des doses minimales. Nous admettrons que les mathématiques sont cohérentes, tout simplement, comme le dit Weyl, parce que nous sentons au fond de nous-mêmes qu’elles le sont, et parce que nous sentons aussi que s’il arrivait dans l’avenir qu’apparussent de nouveaux paradoxes, nous aurions assez d’ingéniosité pour surmonter les crises qu’ils auraient suscitées, comme nous avons toujours su le faire tout au long de l’histoire des mathématiques.

Dans sa thèse de doctorat intitulée *Les limitations internes des formalismes*, le philosophe belge Jean Ladrière montrait que les limitations imposées par les théorèmes de Gödel aux théories mathématiques s’appliquent à toute discipline où l’on fait appel à un symbolisme quelconque. Or, tout langage est un symbolisme, et toute pensée s’exprime par l’intermédiaire d’un langage. Que vous pratiquiez la philosophie, la physique ou la sociologie, n’oubliez jamais que l’épée de Gödel est suspendue au-dessus de vos têtes.

Cette bouleversante conclusion ne peut qu’évoquer à notre esprit cette pensée de Virginia Woolf :

Nous flottons dans un milieu d’une immense étendue, toujours dérivant de manière incertaine, comme entraînés par le souffle du vent. Dès que nous croyons posséder une assise immobile à laquelle nous pensons nous attacher pour enfin nous fixer, elle se déplace et nous laisse en arrière. Si nous la poursuivons, elle se dérobe à notre emprise, s’éloigne et fuit éternellement devant nous. Pour nous, rien ne s’arrête. C’est notre état naturel et c’est pourtant un état tout à fait opposé à nos inclinations. Nous brûlons du désir de nous appuyer sur des bases solides, ultimes, éternelles, sur lesquelles nous puissions édifier une tour qui s’élèverait jusqu’à l’infini, mais soudain la fondation tout entière se lézarde, et la terre s’entrouve.

Constatons-le : à mesure que nos connaissances s’accumulent, les incertitudes auxquelles nous nous heurtons témoignent, devant la

complexité inépuisable de la réalité, de ce que le philosophe Jean-Michel Besnier appelle une « prise de conscience accrue de nos ignorances ». Et il ajoute : « Tout se passe comme si l'étendue de notre savoir jetait une ombre grandissante sur les objets auxquels s'appliquent nos facultés de connaître. Plus nous savons et plus nous découvrons combien nous ignorons. »

Certains verront dans ces réflexions un motif de désespérance. Il faut, je pense, bien au contraire, y voir un défi et un motif d'émerveillement. Car c'est peut-être ça la réalité : un pays des merveilles. C'est ce que nous rappelait Gilles Lapouge dans *Besoin de mirages* :

Pourquoi s'escrimer à rêver alors que le réel, la terre et tout ce qui porte la terre, sont matières des songes ? Pourquoi se gorger d'irréel, quand le réel est un prodige, un chaos, une prestidigitation, un délire et une ivresse ?

Claude Boucher
Professeur titulaire retraité
Département de mathématiques
Université de Sherbrooke